第一章　基本知识

§1　复数的代数运算

1.1　复数

数　　$z=x+iy$

称为复数，其中 x 和 y 是实数，而 i 是虚单位，$i^2=-1$. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部，并记为：

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z.$$

两个复数相等是指它的实部和虚部分别相等，即等式

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2.$$

相当于两个等式：

$$x_1=x_2,\quad y_1=y_2.$$

由于在直角坐标系中，当且仅当两个点具有相等的横坐标和相等的纵坐标时才会重合，所以平面上的全部点可以与所有复数间建立一一对应的关系. 换言之，我们将借助于横坐标为 x，纵坐标为 y 的点来表示复数 $z=x+iy$，这样的平面称为复平面 C.

VISIT…

LANZAROTE
Caliente.com

表示数 z 的点通常称为点 Z. 复数可以用向量来表示，使复数的实部与虚部对应于向量的横坐标与纵坐标（图 1. 1).

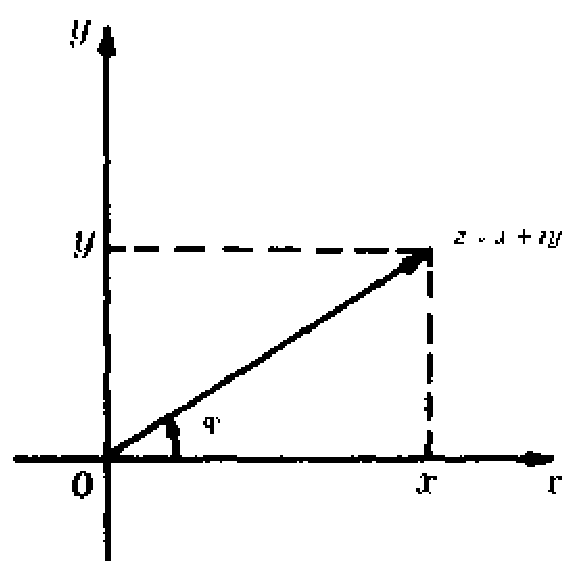


图 1.1

我们将虚部等于零的复数 $x+i0$ 和它的实部看作是一样的：$x+i0=x$，并认为实数是复数的特殊情况. 用 ox 轴上的点表示实数，称此轴为**实轴**. 类似地，实部等于零的复数写为 $0+iy=iy$，称为**纯虚数**，用 oy 轴上的点来表示它们，并称这个轴为**虚轴**.

复数 z 的位置也可用极坐标来确定，也就是借助对应于复数的向量的长度 r，和这个向量与实轴正向的夹角 φ 来确定. 数 r 和 φ 分别称为复数 z 的**模**和**幅角**，记为

$$r=|z|,\quad \varphi=\mathrm{Arg}z.$$

这里引进的模的概念是实数的绝对值的概念的推广. 实数的模就是它的绝对值，纯虚数的模就是它的虚部的绝对值.

由模和幅角的定义推出，若 $z=x+iy$，则

$$x=r\cos\varphi=|z|\cos(\mathrm{Arg}z),$$
$$y=r\sin\varphi=|z|\sin(\mathrm{Arg}z) \tag{1.1}$$

和

$$|z|=r=\sqrt{x^2+y^2},$$
$$\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\mathrm{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

值得注意的是，幅角 Argz 是多值的，它们之间可以相差 2π 的

的整数倍，通常取由不等式

$$0 \leqslant \mathrm{Arg}z < 2\pi$$

所确定的值作为幅角的**主值**，z 的幅角的主值记为 $\arg z$. 于是我们有

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi. \qquad (k: \text{整数}) \qquad (1.2)$$

例如，当 z 是正实数时，$\arg z = 0$；当 z 是负实数时，$\arg z = \pi$；当 z 是具有正虚部的纯虚数时，$\arg z = \frac{\pi}{2}$. 但是注意，0 的幅角是没有意义的.

利用公式(1.1)，可以把任何异于零的复数表达为复数 z 的**三角形式**：

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.3)$$

例如，

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0),$$

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi).$$

借助于欧拉公式 $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$（见本书第六章 § 1），可以把复数 z 的三角形式 (1.3) 化为**指数形式**：

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (1.4)$$

复数 $z = x + iy$ 的**共轭复数**定义为 $\bar{z} = x - iy$. 彼此共轭的复数关于实轴是对称的.

彼此共轭的复数的模是相同的，而幅角相差一个符号：

$$|\bar{z}| = |z| \qquad \arg\bar{z} = -\arg z.$$

任何实数与它自己共轭.

1.2 复数的四则运算

将算术的普通规则运用于复数，我们有

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),$$
$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2). \tag{1.5}$$

第二个恒等式中,我们使用了关系式 $i^2=-1$.

复数的减法定义为加法的逆运算,由此得到

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

特别地,由(1.5)推出,两个彼此共轭的复数的乘积是实数,等于该复数的模的平方：

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2$$

或

$$z\bar{z}=|z|^2.$$

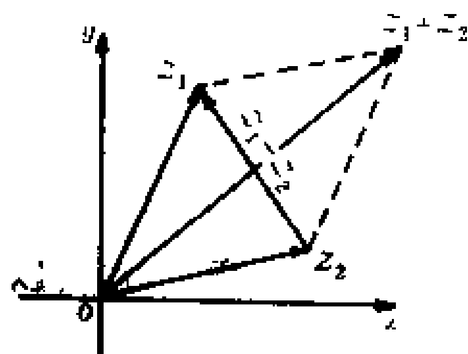


图 1.2

若用向量表示复数，则复数的实部和虚部就是向量的坐标. 因为向量的相加或相减就是它们的坐标对应地相加或相减，于是复数的相加或相减归结为相应向量的相加或相减(图 1.2).

由于复数的模等于对应向量的长度，所以两个复数的和的模不大于两个复数的模的和：

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

接连使用几次这个不等式，便得到

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.$$

当且仅当表示数 z_1, z_2, …, z_n 的向量在一条直线上，且指向同一方向，即当

$$\arg z_1=\arg z_2=\cdots=\arg z_n$$

时．等式成立．

由复数减法的几何意义，若 z_0 是给定的复数，ρ 是给定的实数，则满足方程

$$|z-z_0|=\rho$$

的点的全体形成以 z_0 为中心以 ρ 为半径的圆周，不等式 $|z-z_0|<\rho$ 确定这圆周内的点集，而不等式 $|z-z_0|>\rho$ 确定圆周外的点集．

复数的除法定义为乘法的逆运算．利用共轭数的性质，按下述方法进行复数的除法是方便的：首先把分子和分母乘以分母的共轭数，于是分母变为正实数，然后分别用分母除所得分子的实部和虚部：

$$\begin{aligned}\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}&=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}\\&=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\\&=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.\end{aligned}$$

若利用复数的三角形式：

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$

$$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

则得到，

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\quad+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]\end{aligned}\qquad(1.6)$$

因而复数相乘就是它们的模相乘，而幅角相加：

$$|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|,$$

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

注意，后一等式的两端是多值的，所以应理解为等式左端的值的集合和它的右端的值的集合完全一样.

表示乘积 z_1z_2 的向量可以这样得到：把表示数 z_1 的向量绕正向旋转角度 φ_2，再把它的长度乘以 $|z_2|$.

用三角式表示除法的公式为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)],$$

即

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}; \qquad \mathrm{Arg}\,\frac{z_1}{z_2}=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2.$$

1.3 乘方与开方

设 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由乘法规则，

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

即 (1.7)

$$|z^n|=|z|^n, \quad \mathrm{Arg}(z^n)=n\mathrm{Arg}z.$$

利用除法规则，不难验证这公式对于负整数 n 也成立.

在 $r=1$ 的特殊情况下，我们有

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi. \tag{1.8}$$

利用二项式定理，

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$$
$$=\cos^n\varphi+ni\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi+\cdots$$
$$+n(i)^{n-1}\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi+i^n\sin^n\varphi. \tag{1.9}$$

将(1.8)和(1.9)结合起来，我们就可以得到通过 $\cos\varphi$ 和 $\sin\varphi$ 表达 $\cos n\varphi$ 或 $\sin n\varphi$ 的表达公式.

例如，当 $n=3$ 时，

$$\cos3\varphi+i\sin3\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^3$$
$$=\cos^3\varphi+3i\cos^2\varphi\sin\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi-i\sin^3\varphi.$$

比较两边的实部和虚部，我们得到

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$$
$$= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi, \tag{1.10}$$

及

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$$
$$= -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi. \tag{1.11}$$

通过到复数域的旅行，我们很容易地得到了实数域的两个结果. n 越大，这种方法的优越性就越明显，这使我们回忆起近代著名数学家哈达玛 (Jacques Hardamard) 的一句名言：实域中两个真理之间的最短路程是通过复域.

下面我们转而研究求方根的问题.

设 n 是正整数. 求 z 的 n 次方根就是求这样的数 $w=\sqrt[n]{z}$，它的 n 次方等于 z，根据乘方法则，

$$|w|^n = |z|, \qquad n\mathrm{Arg}w = \mathrm{Arg}z.$$

令 $w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，并考虑到复数的幅角含有 2π 的整数倍的未确定项，则有

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \ (k=\pm1, \pm2, \cdots).$$

从而

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi+2k\pi}{n},$$

这里根式下取的是算术根. 这样一来，

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$
$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right). \tag{1.12}$$

虽然 k 是任意整数，但由这个公式只能得到 n 个不同的值，并且这 n 个不同的值可通过令 $k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 而得到.

公式 (1.12) 表明，所有这些不同的根都具有相同的模 $\sqrt[n]{|z|}$，相邻两个值的幅角差为 $2\pi/n$. 由此我们知道，任何复数

$z\neq0$ 的 n 次方根都有 n 个不同的值，而且这些值可以被排成内接于圆 $|w|=\sqrt[n]{|z|}$ 的一个正 n 边形的 n 个顶点（图 1.3）.

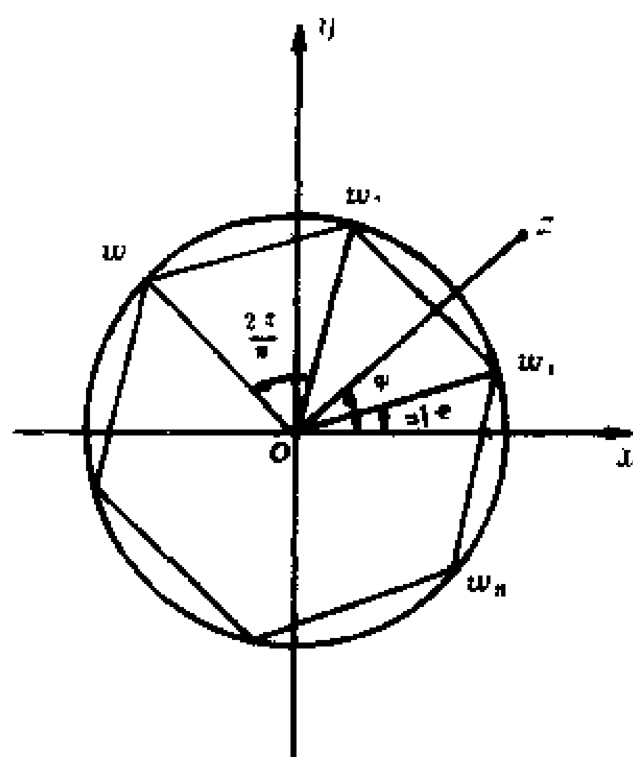


图 1.3

由此我们还知道，n 次方程

$$z^n+a=0 \tag{1.13}$$

可解，这里 a 是任意的复数，并且知道，这个方程有 n 个不同的值.

1.4 单位根

求数 1 的 n 次根是一种特别重要的情形. 这个根有 n 个值，所有这些值我们都叫做 n 次单位根. 由等式

$$1=\cos0+i\sin0$$

与公式（1.12），

$$\sqrt[n]{1}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1. \qquad (1.14)$$

由上式知，当 n 为偶数时，在 $k=0$ 与 $\frac{n}{2}$ 时得 n 次单位根的实值；当 n 为奇数时，仅在 $k=0$ 时才能得出实值. 在复平面上，n 次单位根排列在单位圆的圆周上，而且把圆周分为 n 等分，其中一个分点是数 1. 因此，n 次单位根那些不是实数的值的位置关于实轴对称，换言之，它们两两共轭.

二次单位根有两个值 1，-1. 四次单位根有四个值 1，-1，i 和 $-i$. 三次单位根有三个数，除去 1 以外，是共轭数

$$\begin{aligned}\omega&=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \omega^2&=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned} \qquad (1.15)$$

三次根的值经常用到，应当记住.

这里指出，复数 a 的 n 次根的所有值，都可从它的某一个值乘上所有的 n 次单位根来得出. 事实上，设 β 是 a 的 n 次根的某一个值，即 $\beta^n=a$，而 ε 为任一 n 次单位根，即 $\varepsilon^n=1$. 则 $(\beta\varepsilon)^n=\beta^n\varepsilon^n=a$，即 $\beta\varepsilon$ 为 $\sqrt[n]{a}$ 的一个值. 用 β 乘 n 次单位根的每一个值，就得出 a 的 n 次根的 n 个不同的值，即这个根的所有的值.

例如，数 -8 的立方根有一个是 -2，由 (1.15) 知，它的其它两个根是

$$-2\omega=1-i\sqrt{3},\ -2\omega^2=1+i\sqrt{3}.$$

§2 复变量函数论的基本概念

在这一节中，我们将要介绍复变函数论的一些最基本的概

念. 复变函数，它的极限，连续性等，这些概念来自实变量函数论中的相应概念.

2.1 几何概念

复平面上的一个点集 D 叫做一个**区域**，若它具有两个性质：1. 在 D 中的每一个点必有一个以这个点为圆心的充分小的圆，同它一起都属于这个集合；这个性质称为**开集性**，2. D 中的任何两个点都可用一条由 D 的点所构成的折线连接起来；这个性质称为**连通性**.

复平面上点的邻域可作为区域的最简单的例子. 所谓一个点 a 的 ϵ 邻域，是指以 a 为圆心，以 ϵ 为半径的一个开圆，即满足不等式

$$|z-a|<\epsilon$$

的那些点的集合.

凡本身不属于区域 D，而在它的任何邻域内都含有属于 D 的点的那种点叫做 D 的**边界点**. 区域 D 的所有边界点的集合叫做 D 的**边界**. 区域 D 连同它的边界合在一起的集合，叫做**闭区域**，用记号 $\overline{D}$ 来表示.

2.2 复自变量函数

设函数 $w=f(z)$ 定义在某一点集 E 上，对于 E 的每个点 z，都有 w 的一个或多个值与之对应，就说在点集 E 上给定了函数 $w=f(z)$. 若每一个点 z 只有一个 w 值与之对应，则 w 称为 z 的**单值函数**，如有多个 w 值与之对应，则称 w 为 z 的**多值函数**.

例如，函数 $w=z^2$ 是单值的，它定义在整个复平面 C 上.

函数 $w=\text{Arg}z$ 是多值的，在全平面上除去点 $z=0$ 外是有

定义的.

给定复数 z 相当于给定两个实数 x 和 y：$z=x+iy$. 同样地，w 也对应着两个实数 u 和 v：$w=u+iv$. 这样一来，复变函数 w 和复自变量 z 之间的关系 $w=f(z)$ 相当于两个关系：

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y). \tag{2.1}$$

它确定实数值 u 和 v 为自变量 x 和 y 的函数.

例如，若 $w=z^2$，则令 $z=x+iy$，$w=u+iv$，得到

$$\begin{aligned} u+iv &=(x+iy)^2 \\ &=(x^2-y^2)+2ixy, \end{aligned}$$

因而等式 $w=z^2$ 相当于等式

$$u=x^2-y^2,\qquad v=2xy.$$

若以某一个平面上的点表示自变量 z 的值，这个平面称为"z 平面"；而以另一个平面上的点表示函数 w 的值，这个平面称为"w 平面". 函数 $w=f(z)$ 确定了 z 平面的点和 w 平面的点的对应，换言之，函数实现了由 z 平面的点到 w 平面的相应点的**映射**或**变换**. 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 上是单值的，并把 z 平面上的区域 D 映射到 w 平面上的区域 G 的内部. 如果进一步假定在映射 $w=f(z)$ 之下，D 的两个不同点对应于 G 的两个不同点，那么这个映射就称为在 D 是**一一的**，或者**单叶的**.

设已经给定了一个把区域 D 映射到区域 G 上去的函数 $w=f(z)$. 如果有一个函数 $z=\varphi(w)$，它使得 G 中的每一个点 w，都与所有那些由函数 $w=f(z)$ 映到点 w 的点 z 成对应，那么这个函数 $z=\varphi(w)$ 就叫做函数 $w=f(z)$ 的反函数(图 1.4)，不难看出：当 f 同 φ 这两个函数都是单值函数时，而且也只有在这时，映射 f 是一一的.

在弄清了映射的概念后，我们来研究在映射下曲线的变化.

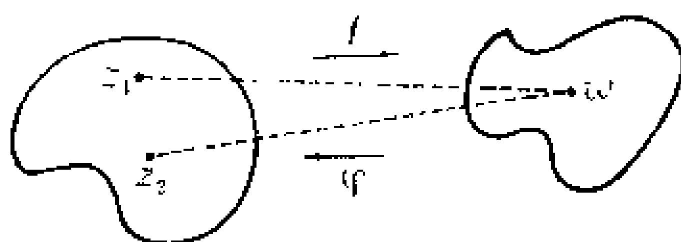


图 1.4

我们知道，在平面上曲线可以用参数方程来表示. 设 $x(t)$、$y(t)$ 是变数 t 的实连续函数，t 在区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上变化. 方程

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta \end{cases} \tag{2.2}$$

给出一条连续曲线的参数表示式. 例如，以原点为中心、r 为半径的圆具有如下的参数表示式

$$\begin{aligned} &x=r\cos\theta, \\ &y=r\sin\theta, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{aligned} \tag{2.3}$$

假如我们令 $z=x+iy$，使 $z(t)=x(t)+iy(t)$，则曲线的分析表达式可以写成一个方程

$$z=z(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta.$$

例如圆(2.3)的方程可写为

$$z=z(\theta)=r(\cos\theta+i\sin\theta), \quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

借助于复数的指数表示，我们又可将圆(2.3)的方程写为

$$z=re^{i\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi. \tag{2.4}$$

圆的这种方程使用起来非常方便.

一般说来，在映射 $w=f(z)$ 下，曲线的像仍是曲线，我们通过具体实例来说明这一点.

例 1 考虑映射 $w=e^{i\theta}z$. 由复数乘法的几何意义知道，这是一个绕原点转动 θ 角度的旋转，在这个映射之下，过原点的直线变为过原点的直线，以原点为心的圆变为以原点为心的圆. 其

它的曲线也都旋转一个 θ 角度.

例 2 考虑映射

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right). \tag{2.5}$$

这个映射要比例 1 复杂多了. 我们只研究一些特殊曲线在映射(2.5)下的像. 通过这一研究我们还可以知道,在映射(2.5)下,单位圆的内部和外部分别映为什么样的区域. 以原点为心,以 1 为半径的圆称为**单位圆**. 先看单位圆内以原点为心的圆的像是什么. 为此设

$$z=re^{i\theta},w=u+iv.$$

代入(2.5),得

$$u+iv=\frac{1}{2}\left(r\cos\theta+ir\sin\theta+\frac{1}{r}\cos\theta-\frac{i}{r}\sin\theta\right),$$

分开实部和虚部，得到方程组:

$$\begin{cases}u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta,\\[2mm] v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta.\end{cases} \tag{2.6}$$

固定 $r=r_0<1$,让 θ 从 0 变到 2π,得到单位圆内的一个圆. 在映射(2.5)下,它的像在 w 平面上是一个椭圆. 这只要在公式(2.6)中消去参数 θ,就能得出这个椭圆的标准方程:

$$\frac{u^2}{\dfrac{1}{4}\left(r_0+\dfrac{1}{r_0}\right)^2}+\frac{v^2}{\dfrac{1}{4}\left(r_0-\dfrac{1}{r_0}\right)^2}=1. \tag{2.7}$$

它的两个半轴分别是

$$a=\frac{1}{2}\left(r_0+\frac{1}{r_0}\right),\quad b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0}-r_0\right).$$

当 θ 从 0 变到 2π 时,通过 u、v 符号的改变可看出,上半圆周映为下半椭圆,下半圆周映为上半椭圆. 并且对于任意的 r_0 都有

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=1.$$

所以，所有这些椭圆都是共焦的，焦点为±1（图1.5）．当 $r_0\to 1$ 时，$a\to 1$，$b\to 0$，椭圆"压缩"到实轴上的线段 $[-1, 1]$；当 $r_0\to 0$ 时，$a\to\infty$，$b\to\infty$，椭圆无限变大．这样一来，当 r_0 在区间 $[0, 1)$ 中变化时，这些椭圆扫过除线段 $[-1, 1]$ 外的整个复平面，这就是单位圆内部在映射 w 下的象区域．

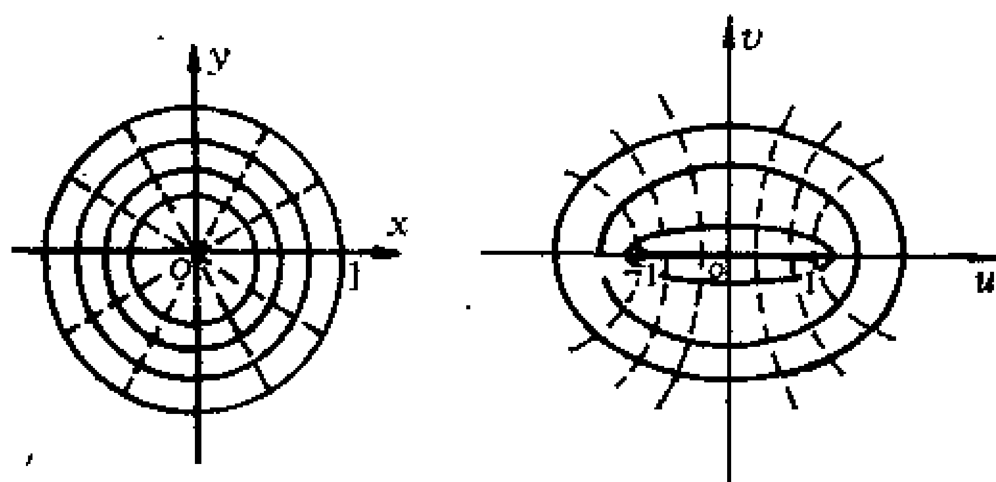


图 1.5

用研究单位圆内的任一条半径的像的办法同样可以得出这一结论．

固定 $\theta=\theta_0$，让 r 从 0 变到 1，得到单位圆内的一条半径，和 x 轴正向的交角为 θ，它的像是 w 平面上的半条双曲线．从(2.6)消去参数 r 就得到双曲线的标准方程：

$$\frac{u^2}{\cos^2\theta_0}-\frac{v^2}{\sin^2\theta_0}=1. \tag{2.8}$$

双曲线的实半轴 $a=|\cos\theta_0|$，虚半轴 $b=|\sin\theta_0|$．当 θ_0 变动时，我们得到不同的双曲线．所有这些双曲线都是共焦的，焦点是 ±1．下面我们来看一看这些双曲线的具体位置．

利用（2.6）式不难看出下述结果．

当 $\theta_0=0$ 时，$v=0$，$1<u<+\infty$．

当 $\theta_0=\frac{\pi}{2}$时，$u=0$，$-\infty<v<0$.

当 $\theta_0=\pi$ 时，$v=0$，$-\infty<u<-1$.

当 $\theta_0=\frac{3}{2}\pi$ 时，$u=0$，$0<v<+\infty$.

当 θ_0 在第一象限时，$\cos\theta_0<u<+\infty$，$-\infty<v<0$. 这是半条双曲线，位于第四象限，不带顶点.

当 θ_0 在第四象限时，$\cos\theta_0<u<+\infty$，$0<v<+\infty$. 这是位于第一象限的单支双曲线，不带顶点（图 1.5）.

当 θ_0 位于二、三象限时，读者不难得出类似结论. 由此我们又可得出结论：单位圆内部在映射 w 下的象区域是整个复平面去掉线段 $[-1, 1]$.

我们建议读者采用上述办法研究一下，在映射 w 下，单位圆的外部的象区域是什么.

例 2 提供了平面区域间映射的一个具体实例，它告诉我们如何将去掉一段直线，或者说有裂缝的平面映射到单位圆的内部或外部. 第二章我们还会再次遇到这个函数，并将它应用到具体问题中去.

2.3 序列的极限

设 z_0 是一个有限复数. 含 z_0 的任何区域称为 z_0 的邻域. 不过我们只用圆邻域. 满足不等式

$$|z-z_0|<\rho$$

的点的全体称为点 z_0 的 ρ 邻域.

对于∞，我们把任意大的半径的圆外称为它的邻域，即对任意大的 $A>0$，满足

$$|z|>A$$

的点的全体称为∞的邻域.

有了邻域的概念，我们来定义点列的极限.

称有限复数 z_0 是点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 的极限，如果对于任意给定的、不管多么小的 $\varepsilon>0$，总能找到这样的正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，不等式 $|z_n-z_0|<\varepsilon$ 成立，记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0.$$

若 $z_n=x_n+iy_n$，$z_0=x_0+iy_0$，并且考虑到等式

$$|z_n-z_0|=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2},$$

则由极限定义不难得出如下结论：极限

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

存在相当于两个实的极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$$

存在.

称点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 趋于 ∞，并记为

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

如果对于不管多么大的正数 M，总能找到这样的正整数 N，使得当 $n\geqslant N$ 时，不等式 $|z_n|>M$ 成立.

一个点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$，有时也简记为 $\{z_n\}$. 我们也用序列这一词. 在序列中有些项可能是相同的，这是与点列不同的地方.

一个序列(或点列)有有限极限 z_0，我们称这个序列(或点列)是收敛的. 它没有极限，或者以 ∞ 为极限，则称它是发散的.

2.4. 函数的极限，连续性

在有了序列极限的定义后，就可以定义函数的极限了.

当 $z \to z_0$ 时，称函数 $f(z)$ 以 w_0 为极限，如果对不管多么小的 $\varepsilon>0$，总能找到一个 $\delta>0$，使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，总有 $|w-w_0|<\varepsilon$ 成立. 记为

$$w_0=\lim_{z \to z_0} f(z).$$

例如，$f(z)=z^2$. 当 $z \to i$ 时，

$$z^2 \to i^2=-1.$$

当 z_0 是∞，或 w_0 是∞，或两者都是∞时，按无穷远点邻域的定义改写上面的定义.

例如，当 $z \to \infty$时，$f(z) \to w_0$ 是有限数. 等式

$$\lim_{z \to \infty} f(z)=w_0$$

表示，对于任意的 $\varepsilon>0$，总有 $A>0$，使得满足 $|z|>A$ 的一切 z，函数 $f(z)$满足不等式

$$|f(z)-w_0|<\varepsilon.$$

称函数 $f(z)$在 z_0 是连续的，如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=f(z_0).$$

按定义，这就是说，任给 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得当 $|z-z_0|<\delta$ 时，

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

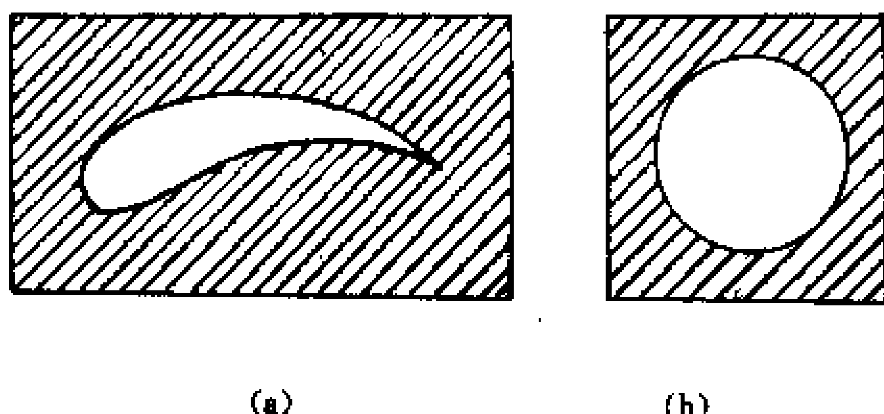
成立.

例如 $f(z)=z^2$ 在每一点 z_0 处连续.

第二章　保角变换

从第一章的一些具体例子中已经知道，在映射 $w=f(z)$之下，曲线被映为曲线．下面我们将给出两条曲线在它们交点处的夹角的定义，并研究在映射 $w=f(z)$之下夹角的变化．当然我们的研究仅局限于一些最简单、最初等的例子，但是它们仍然说明了复变函数理论中的一些非常重要的思想．在这些例子中，映射 $w=f(z)$都是保持曲线交角不变的，因而称为**保角映射**或保角变换．保角映射的理论是复变函数论的一个重要组成部分，它不但在理论研究中具有重要的作用，而且在应用上也是很有用的一部分．在力学、空气动力学、弹性力学、电学以及热学中都要用到保角映射．例如在许多问题中都要处理在电荷周围的电位势问题，或处理一个热体周围的温度分布问题，或者处理在稳定流体中流体在障碍物周围的流速问题．对于一般形状的带电体，带热体，或障碍体，计算位势、温度或流速并不是一件容易的事情，为了克服这一困难，我们常借助保角变换，将它们化为最简单的形状，例如，为了设计飞机的翅膀，需要计算空气流过机翼时的速度．图 2.1 的图(a)是机翼的横断面，经过一个适当的保角变换(本章的后面将要给出)这个断面可化为圆(图(b)，这时物体本身考虑为圆柱形)，而对圆来说，计算特别简单，然后再化

回去，就可以得原来要求的东西了.



(a) (b)

图 2.1

这样一来，保角映射为我们提供了一种计算位势，温度及流速等物理量的有力工具.这就说明了研究保角变换多么重要，本章将介绍一些初等的、但是重要的保角变换，并给出两个著名的应用.

§1 多项式函数实现的变换

1.1 线性变换

我们称

$$w=az+b \tag{1.1}$$

为**线性函数**，其中 a、b 为复常数. 设 $k=|a|$，$\alpha=\arg a$. 则 $a=ke^{i\alpha}$. 函数(1.1) 便可分解为

1) $z_1=e^{i\alpha}z$,

2) $z_2=kz_1$,

3) $w=z_2+b$.

回忆一下复数四则运算的几何意义，我们就可看出，1)是平

面 z 旋转一个 α 角度，2)是平面 z_1 的一个相似变换(伸长或压缩)，面 3)是整个 z_2 平面沿固定向量 b 所做的平移.

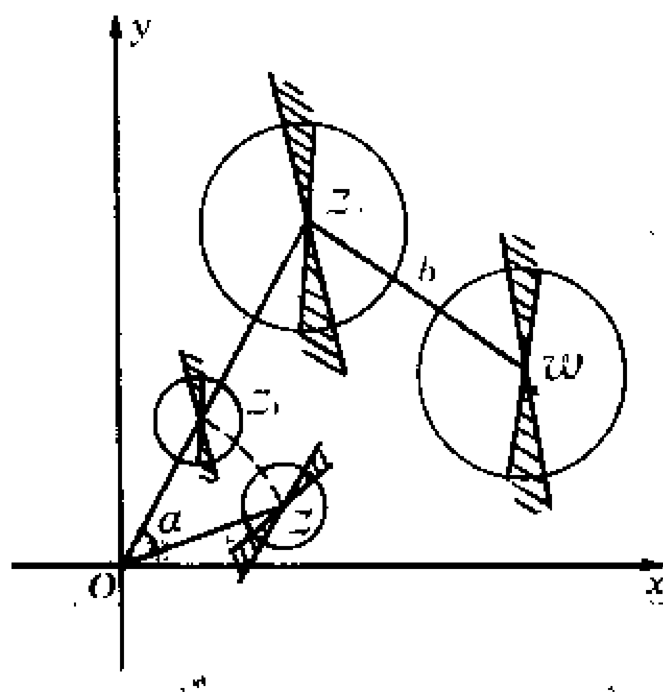


图 2.2

由线性函数所实现的映射称为**线性变换**或**线性映射**. 由上面的讨论知，线性映射是上面三种最简单的映射的复合. 由此便可以知道，映射(1.1)在全平面是一一的，并且把直线仍变为直线，面且保持两直线间的交角不变，把圆周仍变为圆周(图 2.2).

1.2 曲线间的夹角

前面我们指出，线性变换把直线变为直线，并保持直线间的交角不变，其实线性变换不仅保持直线间夹角，而且还保持曲线间的夹角. 如何理解曲线间的夹角呢？

为此，我们先研究曲线在一点的切线的概念，从中学数学中读者已经知道，圆在一点的切线就是过那一点与半径垂直的直线. 对于一条一般的曲线，切线概念的引入就要稍微复杂一些了，设 L 是一条曲线，P 是 L 上的一点，我们来研究如何定义曲线 L 在点 P 的切线. 在 L 上另取一点 Q，用直线连接 P、Q 两点，得到曲线 L 的一条割线$\overline{PQ}$. 让点 Q 沿着曲线 L 向点 P 移

动，割线$\overline{PQ}$也就跟着点 Q 移动．现在让点 Q 无限接近于点 P，如果割线$\overline{PQ}$的极限位置存在，那末，它的极限位置 PT 就称为曲线 L 在点 P 的切线(图 2.3).

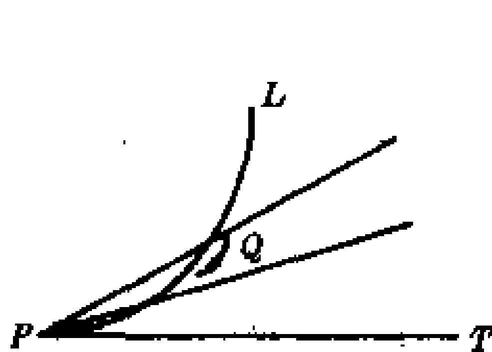


图 2.3

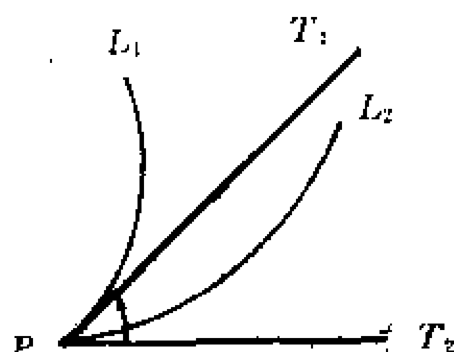


图 2.4

现在可以定义曲线间的夹角了．设曲线 L_1 与 L_2 交于点 P，并假定曲线 L_1 与 L_2 在点 P 都有切线，它们的切线分别是 PT_1 与 PT_2. 我们就将 PT_1 与 PT_2 间的夹角定义为曲线 L_1 与 L_2 的夹角(图 2.4).

当两条相交曲线在交点具有同一条切线时，它们的夹角为零(图 2.5).

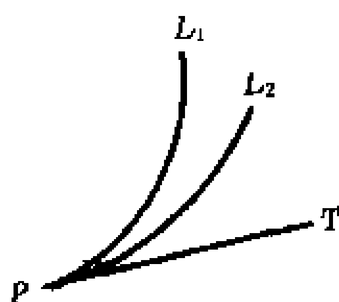


图 2.5

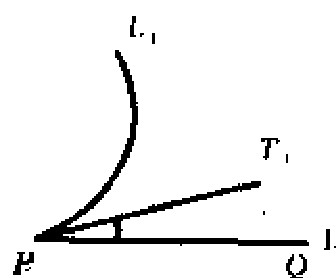


图 2.6

当 L_1 是一条曲线，而 L_2 是一直线时，它们的夹角就是在交点处切线与直线的夹角(图 2.6).

1.3 $z^n(n\geqslant 2)$所实现的变换

这一段我们研究由函数

$$w=z^n\ (n\geqslant 2) \tag{1.2}$$

实现的变换，并证明除去可能的例外点以外，它是处处保角的. 我们从 $w=z^2$ 开始，这个变换弄清楚了，一般情况就不难了.

$w=z^2$ 有一个例外点，这个例外点就是 $z=0$. 在原点 O 处这个函数所实现的变换不保角.

从原点 O 出发引一条射线 OM，假定它和 x 轴正向的夹角为 φ（图 2.7）. 在射线 OM 上的每个点 z，都有 $\arg z=\varphi$. 由复数的乘法，得

$$|w|=|z|^2,$$

$$\arg w=2\arg z.$$

这样一来，向量 z 伸长 $|z|$ 倍，再旋转一个角度 $\arg z=\varphi$ 就得到点 w. 点 z 在射线 OM 上，点 w 一定在从点 O' 出发的射线 $O'M'$ 上，射线 $O'M'$ 与 u 轴的正方向的夹角为 2φ（图2.8）.

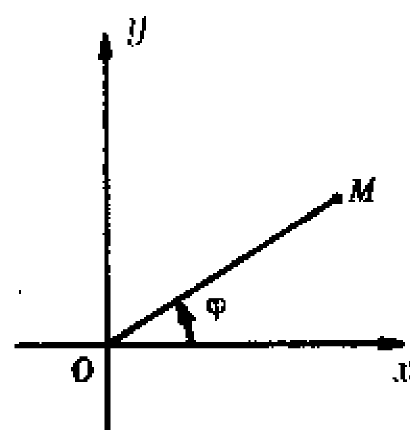


图 2.7

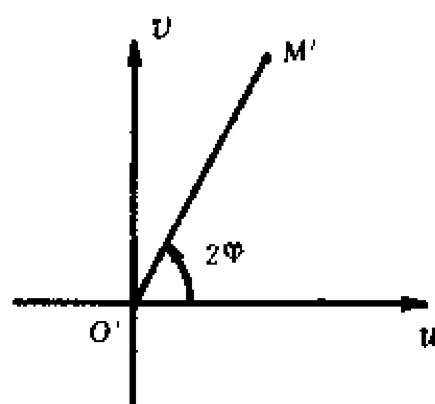


图 2.8

当点 z 从点 O 出发沿着 OM 跑向无穷时，点 w 就从点 O'

出发沿着 $O'M'$ 跑向无穷. 由此可见，函数 $w=z^2$ 把与 x 轴正向夹角为 φ 的射线变为与 u 轴正向夹角为 2φ 的射线.

现在考虑过原点 O 的两条射线 OM_1 与 OM_2，它们与 x 轴正向的夹角分别为 φ_1 与 φ_2，不妨设 $\varphi_2 \geqslant \varphi_1$，于是 OM_1 与 OM_2 间的夹角为 $\varphi_2-\varphi_1$. 设函数 $w=z^2$ 把 OM_1 变为 $O'M_1'$，把 OM_2 变为 $O'M_2'$，由前面的讨论知道，它们与 u 轴正向的夹角分别为 $2\varphi_1$ 与 $2\varphi_2$. 这样一来，$O'M_1'$ 与 $O'M_2'$ 间的夹角将是 $2\varphi_2-2\varphi_1=2(\varphi_2-\varphi_1)$. 这就是说，在变换 $w=z^2$ 之下，两直线在原点的夹角被放大成两倍. 不难看出，交于原点的两曲线间的夹角也将放大两倍. 于是我们得出结论：变换 $w=z^2$ 在点 $z=0$ 是不保角的.

下面我们来证明，只要 $z\neq 0$，则变换 $w=z^2$ 在 z_0 就是保角的，因面原点 $z=0$ 是这个变换的唯一例外点.

任取一点 $z_0\neq 0$，并考虑过点 z_0 的一条曲线 L，假定在变换 $w=z^2$ 之下，曲线 L 的像曲线为 L'，L' 过点 $w_0=z_0^2$.

在曲线 L 上另取一点 $z_1\neq z_0$，连接 z_0 与 z_1 得 L 的一条割线. 在 L' 上有相应的一点 $w_1=z_1^2$，连接 w_0 与 w_1 得 L' 的一条割线（图 2. 9）. 我们来比较这两条割线的方向，在曲线 L 上，

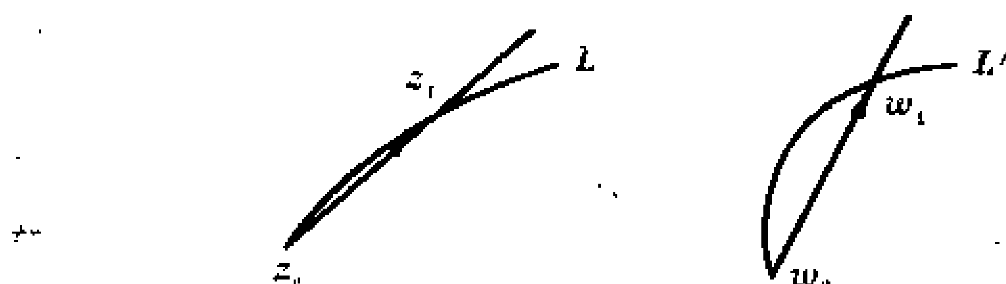


图 2. 9

向量 z_1-z_0 的方向就是割线的方向，在曲线 L' 上，向量 w_1-w_0 的方向就是相应割线的方向. 我们知道，向量的方向是由幅角来表示的，所以我们只需要计算 $\arg(w_1-w_0)/(z_1-z_0)$. 事实上，

$$\arg\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\arg\frac{z_1^2-z_0^2}{z_1-z_0}$$
$$=\arg(z_1+z_0).$$

可见两割线间的夹角为 $\arg(z_1+z_0)$. 由此我们可以进一步得到曲线 L 在 z_0 的切线与曲线 L' 在 w_0 的切线间的夹角了. 让 $z_1\to z_0$, 则向量 z_1-z_0 的方向将趋于曲线 L 在 z_0 的切线方向. 同时, 当 $z_1\to z_0$ 时, $w_1\to w_0$, 向量 w_1-w_0 的方向将趋于曲线 L' 在 w_0 的切线方向. 我们有

$$\lim_{z_1\to z_0}\arg\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\lim_{z_1\to z_0}\arg\ (z_1+z_0)$$
$$=\arg 2z_0=\arg z_0.$$

这就是曲线 L' 在 w_0 的切线的方向与曲线 L 在 z_0 的切线方向的差. 例如当 $z_0=1$ 时, $\arg z_0=0$, 这说明两条切线具有相同的方向. 当 $z_0=i$ 时, $\arg i=90°$, 从而两条切线互相垂直, L' 在 w_0 的切线是由 L 在 z_0 的切线绕正向旋转 90°得到的.

在一般情况下,曲线 L' 在 w_0 的切线方向由曲线 L 在 z_0 的切线方向旋转一个角度 $\arg z_0$ 而得到.

现在我们不难得出,变换 $w=z^2$ 在 $z_0\neq 0$ 的保角性了. 设两条曲线 L_1 与 L_2 交于点 $z_0\neq 0$, 并在点 z_0 形成交角 α. 再设在变换 $w=z^2$ 下, 曲线 L_1 与 L_2 的像分别为 L_1' 与 L_2', 它们具有交点 $w_0=z_0^2$. 上面的讨论指出, L_1' 在 w_0 的切线方向是由 L_1 的切线方向旋转角度 $\arg z_0$ 得到的, 同样的事情对于 L_2' 也成立. 这样一来, L_1' 与 L_2' 在 w_0 的夹角与 L_1 与 L_2 在 z_0 的夹角一样, 即等于 α. 这就是说, 以任意一点 $z_0\neq 0$ 为交点的两条曲线间的夹角在变换 $w=z^2$ 下保持不变.

现在转向一般情况, 我们来讨论变换

$$w=z^n\ (n\geqslant 2)$$

的保角性．读者不难看出，这种情况与 $w=z^2$ 的情况几乎是完全一样的．

首先，$z=0$ 是 $w=z^n$ 的保角性的例外点，在这一点变换不保角，事实上，

$$|w|=|z|^n,$$

$$\arg w=n\arg z.$$

借助于与 $w=z^2$ 一样的讨论，我们得出结论：在变换 $w=z^n$ ($n\geqslant 2$) 之下，交于原点的两曲线间的夹角被放大成 n 倍．

其次，我们证明，只要 $z_0\neq 0$，则变换 $w=z^n$ 在 z_0 就是保角的．仍考虑两条曲线 L 与 L'，它们分别过 z_0 与 z_0 的像点 $w_0=z_0^n$．为了研究曲线 L 在点 z_0 的切线方向与曲线 L' 在点 w_0 的切线方向的变化，我们在 L 上另取一点 z_1，相应地，在 L' 上有点 w_1．然后考虑极限

$$\lim_{z_1\to z_0}\arg\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0},$$

由读者熟知的公式

$$z_1^n-z_0^n=(z_1-z_0)(z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_0+\cdots+z_1z_0^{n-2}+z_0^{n-1}),$$

我们得到

$$\arg\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\arg\frac{z_1^n-z_0^n}{z_1-z_0}$$
$$=\arg\ (z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_0+\cdots+z_1z_0^{n-2}+z_0^{n-1}).$$

于是，

$$\lim_{z_1\to z_0}\arg\frac{w_1-w_0}{z_1-z_0}=\lim_{z_1\to z_0}\arg\ (z_1^{n-1}+z_1^{n-2}z_0+\cdots+z_1z_0^{n-2}+z_0^{n-1})$$
$$=\arg nz_0^{n-1}$$
$$=\arg n+\arg z_0^{n-1}$$
$$=(n-1)\arg z_0.$$

这就是说，曲线 L' 在 w_0 的切线方向由曲线 L 在 z_0 的切线方向

旋转一个角度$(n-1)\arg z_0$而得到，运用对变换$w=z^2$在$z_0\neq0$所作的相同的讨论，我们就得到了$w=z^n$在$z_0\neq0$的保角性了.

1.4 多项式函数

我们用

$$p(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \tag{1.3}$$

表示复系数的多项式，这里$a_0,a_1,\cdots,a_n$是复数. 考虑由函数

$$w=p(z)$$

所实现的变换的保角性. 根据代数基本定理，多项式$p(z)$有n个复根（见第五章§2). 设彼此不同的根为

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_k \qquad (k\leqslant n).$$

它们的重数分别为l_1，l_2，$\cdots$，l_k，则

$$p(z)=(z-\alpha_1)^{l_1}(z-\alpha_2)^{l_2}\cdots(z-\alpha_k)^{l_k}.$$

现在可以研究$w=p(z)$的保角性了. 首先指出，若根α_i的重数$l_i\geqslant2$，则α_i是一个保角性的例外点. 换言之，映射$w=p(z)$在这样的点不保角. 为了证明这一点，我们任取一个根α，并假定它的重数$l\geqslant2$. 这时$w=p(z)$可表示为下述形式：

$$w=p(z)=(z-\alpha)^lQ(z),\quad l\geqslant2,\quad Q(\alpha)\neq0.$$

函数$w=p(z)$将$z=\alpha$映为$w=0$. 过$z=\alpha$的曲线L被映为过$w=0$的曲线L'. 和前面一样，为了找出切线方向的变化，在L上另取一点z，并在L'上找出它的像点w. 当z沿L趋向于α时，向量$z-\alpha$的极限位置就是曲线L在点$z=\alpha$处的切线位置. 同时，当z沿L趋向于$z=\alpha$时，点w就沿L'趋向于点$w=0$，向量w的极限位置就是曲线L'在点$w=0$处的切线位置，我们有下面的计算：

$$\lim_{z\to\alpha}\arg\frac{w-0}{z-\alpha}=\lim_{z\to\alpha}\arg\frac{(z-\alpha)^lQ(z)}{z-\alpha}$$

$$=\lim_{z\to a}[(l-1)\arg(z-a)+\arg Q(z)].$$

现在设 L 在 $z=a$ 处的切线与 x 轴正向的夹角为 θ，L' 在点 $w=0$ 处的切线与 u 轴正向的夹角为 φ，那么，由上面的计算可得如下结果：

$$\varphi=l\theta+\arg Q(a). \tag{1.4}$$

读者由这个结果不难得出，两条以 a 为顶点的曲线间的夹角在变换 $w=p(z)$ 下将被放大 l 倍. 这样一来，在 $p(z)$ 的 $l\geqslant 2$ 级零点处，变换 $w=p(z)$ 是不保角的.

由公式(1.4)可看出，当 $l=1$ 时，变换 $w=p(z)$ 在 $z=a$ 处是保角的. 所以保角性的破坏是由于项 $l\theta$ 的存在. 我们自然会问，除了多项式 $p(z)$ 的 $l\geqslant 2$ 级零点外还有没有其它点破坏变换的保角性呢？如何判别一个点是不是保角性的例外点呢？

给定任意一点 z_0，考虑多项式

$$Q(z)=p(z)-p(z_0).$$

我们注意到由 $w=Q(z)$ 所实现的变换与 $w=p(z)$ 所实现的变换仅差一个平移. 若 $w=Q(z)$ 在 z_0 是保角的，则 $w=p(z)$ 在 z_0 也是保角的，反之亦然. 所以我们只要研究 $w=Q(z)$ 在 z_0 的保角性就可以了. $Q(z)$ 仍是一个多项式，并且 z_0 是它的一个零点，不妨设 z_0 是 $Q(z)$ 的 l 级零点. 于是我们有

$$Q(z)=(z-z_0)^l Q_1(z),\quad Q_1(z_0)\neq 0.$$

由前面讨论，当 $l\geqslant 2$ 时，$w=Q(z)$ 在 z_0 是不保角的；当 $l=1$ 时，$w=Q(z)$ 在 z_0 是保角的.

从上面的讨论我们知道，除了 $p(z)$ 的 $l\geqslant 2$ 级零点外，还可能有别的点是保角性的例外点. 但是我们仍然不清楚这样的点如何去找，它们总共有多少. 为了弄清楚这些问题我们从另外的角度去考虑.

上面的讨论告诉我们，z_0 是变换 $w=p(z)$ 的保角性的例外

点的充要条件是 $p(z)-p(z_0)$ 有如下的分解式：

$$p(z)-p(z_0)=(z-z_0)^l Q_1(z),\quad Q_1(z_0)\neq 0,$$

并且 $l\geqslant 2$. 这一条件可归结为

$$\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)-p(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{l-1}Q_1(z)=0.$$

由(1.3)，

$$\frac{p(z)-p(z_0)}{z-z_0}=\frac{1}{z-z_0}\cdot$$

$$\{a_0(z^n-z_0^n)+a_1(z^{n-1}-z_0^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(z-z_0)\}$$

$$=a_0(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\cdots+zz_0^{n-2}+z_0^{n-1})$$

$$+a_1(z^{n-2}+z^{n-3}z_0+\cdots+zz_0^{n-3}+z_0^{n-2})+\cdots+a_{n-1},$$

取极限，我们有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{p(z)-p(z_0)}{z-z_0}=na_0z_0^{n-1}+(n-1)a_1z_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}.$$

这样一来，z_0 是 $w=p(z)$ 的保角性的例外点的充要条件为

$$na_0z_0^{n-1}+(n-1)a_1z_0^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0.$$

我们将上式左边的多项式叫做函数 $w=p(z)$ 的导函数，并记为

$$p'(z)=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}. \tag{1.5}$$

有了函数 $w=p(z)$，我们不难立刻求出它的导函数. 例如，若 $w=z^3$，则 $w'=3z^2$；如果 $w=4z^2+6$，则 $w'=8z$；等等.

总结上面的讨论，我们有如下的定理：

定理 设 $w=p(z)$，$p(z)$ 是由(1.3)给出的 n 次多项式，那么，由函数 $w=p(z)$ 所实现的变换在复平面上的每一点 z 都是保角的，但最多除去 $(n-1)$ 个例外值，这些值是由(1.5)式表示的 $p'(z)$ 的根.

这个定理告诉我们，$p(z)$ 的导函数的零点都是 $w=p(z)$ 所实现的变换的保角性的例外点. 这个结论可以推广到比多项式更一般的函数类中去. 设 $w=f(z)$ 是一个更一般的函数，定义

于某一复区域 D,设 $z_0\in D$,并假定下述极限存在：

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}.$$

由上面的证明可看出，使这个极限取零的点 z_0 就是保角性的例外点.

§2 两个实例

2.1 地图制作

保角变换有着广泛的应用，其中一个重要方面就是将它应用于制图学上.

绘制地图就是将地球表面的一部分表示在一张平面上. 表示方法自然是多种多样的，所以我们应当首先弄清楚，什么样的地图才算一张完善的地图，有了一个标准，我们就可以来改善自己的方法，使之尽量完善.

一张完善的地图应当具备下面两个条件：

1）所有的线段都按同样的比例伸缩，

2）所有的角度都保持不变.

提出这样两个要求是很自然的. 当我们去旅行，或到某地出差时，自然希望手头有一张可供使用的地图. 地图指给我们的方位是正确的，指给我们的距离是准确的. 因而方向与距离是构成一张完善地图的两个基本要素.

从数学上来看，绘制一张地图就是建立一个从球面到平面的映射或变换，这个映射是一一的，并保持所有的角度和长度（或者长度的比例）不变：这可能吗？或者说，这样的映射存在

吗？生活经验告诉我们，这的确值得怀疑，请找一块乒乓球皮，试着把它展开到平面上，既不允许把它撕开，也不允许把它折叠，你会发现，这是不可能的．这个经验告诉我们：从球面到平面的既保持角度又保持长度的一一的映射是不存在的．下面我们给一个证明．

假定这样的映射是可能的．设 p、q 是球面上的两个不同点，L 是球面上任意一条连接 p 和 q 的线段．再令 p'、q' 和 L' 是在这个映射下 p、q 和 L 在平面上的像．由于映射保持长度，所以 L 和 L' 等长．如果 L 是球面上的短程线，即它的长度小于球面上任何其它连接 p 和 q 的线段的长度，那末 L' 也必然短于在平面上连接 p' 和 q' 的任何其它线段的长度．我们知道，平面上的短程线是直线段，而球面上的短程线是大圆弧，由此得出结论：球面上的大圆弧必然映为平面上的直线段．特别地，由大圆弧组成的球面三角形的各边必然映为平面上直线段组成的平常的三角形的各边．

另一方面，根据映射的保角性，球面三角形的各个角必等于平面上相应三角形的对应角，但是在平面上三角形的内角和是 180°，而球面三角形的内角和是大于 180°的．这样一来，从球面到平面的完善映射是不存在的．如果读者对于球面三角形的内角和大于 180°这一事实不知道的话，也不难从一类特例中看出．球面的每条经线都通过北极，并且与赤道垂直，即与赤道交成直角，于是在由两条连接北极与赤道的经线段和赤道组成的球面三角形中，两底角的和是 180°，所以整个球面三角形的内角和显然大于 180°．

其实早在 18 世纪之前人们可能已经从直观上清楚了不能把球面如实的映射到平面上，18 世纪数学家们的工作揭示了，只有柱面、锥面等所谓可展曲面才能有这样的映射．并且证明

了，如果从球面到平面的映射能保持原来的长度，则将能保持所有的几何性质．由于从球面到平面的映射不能保持全部几何性质，所以人们便把注意力集中到保持角度的映射上去了．

2.2 球极投影

在第一章我们已经指出，一个点列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$，以 ∞ 为极限就是当 n 充分大时，所有的点都落在以原点为圆心，足够大数为半径的圆外．对此我们给一个简单的几何解释．考虑一个半径为 1，中心在原点的球面 S，它在三维空间的方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$

点 (0, 0, 1) 称为**北极**，记作 N．ox_1x_2 平面是复平面 C．复平面与球面 S 交于赤道（图 2.10）.

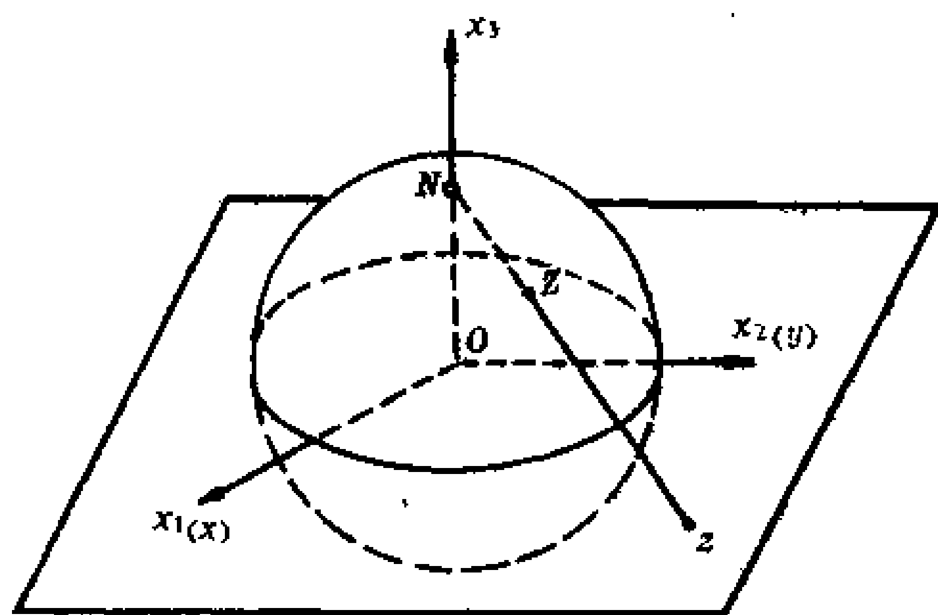


图 2.10

现在我们用球面上的点来表示复数 z．为此，将点 Z 用直线与北极 N 连接起来，并交球面 S 于点 Z．当 $|z|<1$ 时，Z 在下半球面上；当 $|z|>1$ 时，Z 在上半球面上；若 $|z|=1$，则 $Z=$

z. 这样一来，每个复数可由球面上的一个点来表示. 反过来，球面上任一点 $Z\neq N$，Z 与 N 连线也只与复平面 C 交于一点 z. 除了北极 $N=(0,0,1)$ 外，这种对应是一一的. 当 $|z|\to\infty$ 时，Z 趋向于 N. 因此，很自然在复平面 C 上引进一个理想点，称为**无穷远点**，与点 N 相对应，这个点记作 ∞. 加上无穷远点的复平面称为**扩充的复平面**，记作 C_∞ 或 $\bar{C}$. C_∞ 与球面 S 的点建立起来的一一对应关系称为**球极投影**.

这样，在复平面上我们承认有唯一的无穷远点. 对于无穷远点，其模是 $+\infty$，而幅角是不定的. 在扩充复平面上，任何一条直线都通过无穷远点.

下面我们根据球极投影的几何构造，来推导变换公式. 设 $z=x+iy$，对应的 $Z=(x_1,x_2,x_3)$，过点 Z 和 Z 的直线上的点可表示为

$$tN+(1-t)z,\quad -\infty<t<+\infty,$$

即

$$((1-t)x,(1-t)y,t),\quad -\infty<t<\infty.$$

球面 S 的方程是 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$，于是与点 Z 对应的 t 满足

$$1=(1-t)^2x^2+(1-t)^2y^2+t^2,$$

$$1-t^2=(1-t)^2(x^2+y^2).$$

因为 $z\neq\infty$，所以 $t\neq1$，于是

$$t=\frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2},\quad 1-t=\frac{2}{1+x^2+y^2}. \tag{2.1}$$

最后得到点 Z 的坐标是

$$\begin{cases} x_1=(1-t)x=\dfrac{2x}{1+x^2+y^2},\\ x_2=(1-t)y=\dfrac{2y}{1+x^2+y^2},\\ x_3=t=\dfrac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}. \end{cases} \tag{2.2}$$

反过来，由 Z 的坐标（x_1，x_2，x_3）可以表示出它所对应的 Z

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\ y=\frac{x_2}{1-x_3},\ z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}. \tag{2.3}$$

现在我们利用上述公式来证明球极投影的一个重要性质：在球极投影变换下，平面上任何一个圆周都变成球面上的圆周，反之亦然. 这里值得注意的是，"圆周"一词应当作广义的理解：直线算作半径无穷大的圆周.

事实上，xy 平面上任一圆周的方程具有形式

$$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0, \tag{2.4}$$

其中 A、B、C 与 D 都是实数. 当 $A=0$ 时，方程（2.4）表示一条直线. 为了确定球面上的对应曲线，把方程（2.4）中的 x 和 y 用它们通过 x_1、x_2 和 x_3 的表达式来替换，不难得到：

$$A\frac{x_3}{1-x_3}+B\frac{x_1}{1-x_3}+C\frac{x_2}{1-x_3}+D=0$$

或

$$Bx_1+Cx_2+(A-D)x_3+D=0. \tag{2.5}$$

这个方程是一次的，所以表示一个平面. 注意到点（x_1，x_2，x_3）还在球面 S 上，从而点在平面（2，5）与球面 S 的交线上，也就是说在球面上形成一个圆周.

反过来，很容易知道球面 S 上任一个圆周都变成复平面的圆周，这是因为利用系数的任意性总可以把平面表示成(2，5)的形状. 显然，当 $A=0$ 时，平面（2，5）过北极 N（0，0，1），所以只有在球面的圆周通过北极的情形下，这个圆周才变成直线. 从几何上看，这个事实是明显的，因为与平面上的直线相对应的球面上的圆周，必须经过平面上无穷远点的像点 N.

球极投影的另一重要性质是：保角性. 具体而言，让我们在球面 S 上考虑相交某一点 M 的两条球面曲线，并假定这两条

球面曲线的交角为 α，即这两条曲线在点 M 的切线的交角为 α（图 2.11）. 设点 M 在复平面 C 上的球极投影为 M'，两条曲线的球极投影在 M' 的切线构成某一交角 α'. 我们来证明 $\alpha=\alpha'$. 即球极投影保持角度不变. 为此，我们首先注意到，当曲线的割线趋向于曲线的切线时，割线的投影也就趋向于切线的投影，而同时也趋向于这条曲线的投影的切线. 由此可见，球面 S 上两条曲线的切线的投影就是复平面 C 上两条投影曲线的切线.

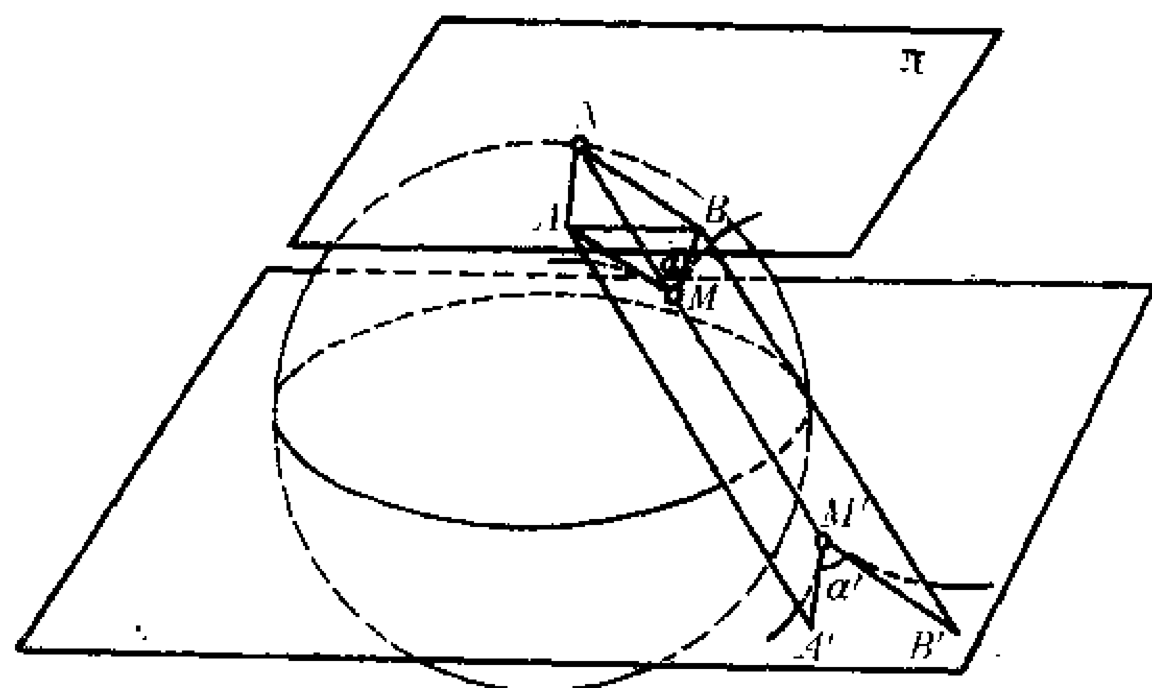


图 2.11

设球面 S 在点 N 的切平面为 π；显然切平面 π 平行于复平面 C. 现在让我们延长两条球面曲线的切线，使它们与切平面 π 交于点 A 和 B. 易见 $\triangle ANB \cong \triangle AMB$，这是因为 AB 是两个三角形的公共边，AN 与 AM 是从同一点出发的两条球面的切线，所以 $AN=AM$，同理，$BN=BM$. 因此，$\angle ANB=\angle AMB=\alpha$. 现在看投影曲线的切线，其中一条是平面 NAM 与复平面 C 的交线，另一条是平面 NBM 与复平而 C 的交线，它们各与 AN 与 BN 平行. 从而它们的交角 α' 等于 $\angle ANB=\alpha$. 这就是我们要证明的.

球极投影为我们提供了一种绘制地图的方法. 以这种方式给出的地图保持各个方向的交角不变，但是不能保持长度的比例不变. 图 2.12 的左图是在球极投影下格陵兰的地图.

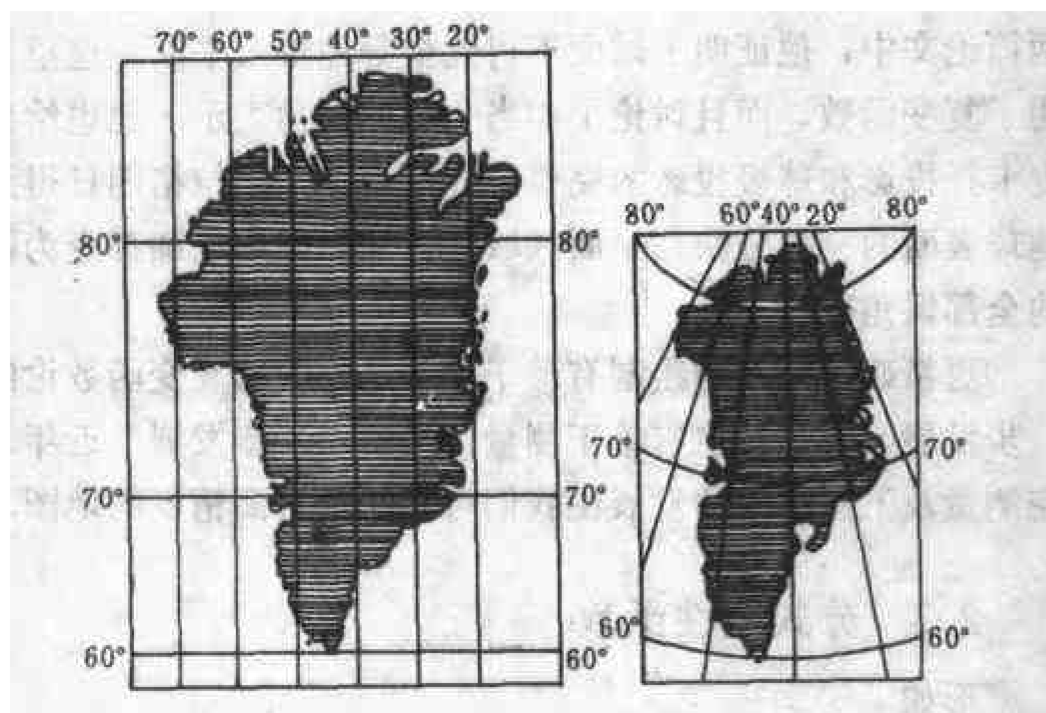


图 2.12

利用球极投影绘制地图在历史上出现得很早. 托勒密(ptolemy，Claudius，逝于公元 168 年) 在他的“平球法”中用了球极平面投影. 他还发明了一种锥面投影法，就是把地面上的一块区域从地心投射到一个与球面相切的锥面上.

图 2.12 的左图是借助公式

$$z' = \log|z| + i\arg z$$

由右图得出的. 这种投影法称为**麦卡托投影**，是荷兰科学家麦卡托 (Mercator，1512－1594) 发明的，在这张图上纬线和经线是直线. 经线是等距的，但纬线的间隔是递增的，使之保持经度一分和纬度一分的长的比值. 这种地图的优点之一是，地图上相互两点的罗盘方位是正确的.

兰伯特（J. H. Lambert，1728—1777）在理论制图学方面开创了一个新纪元．他对球面到平面的保角映射作了相当一般性的研究，并得到了这种映射的公式．欧拉在这方面也做出了许多贡献，而且实际上还画了一幅俄国地图，在1775年提出的两篇论文中，他证明了球面不可能全等地映入平面．这里他使用了复变函数，而且讨论了相当一般的保角表示．他也给出了麦卡托投影和球极投影的完整的分析．1779年拉格朗日得到了地球表面的一部分映到平面区域并且把纬圈和经圈都变为圆弧的全部保角变换．

更精确的地图的绘制有赖于微分几何学与复变函数论的进一步发展，自然地也有赖于测量仪器的进一步发展．近年来航空测量及卫星测量的发展使我们可以绘制出高精度的地图．

2.3 分式线性函数

形如

$$w=\frac{az+b}{cz+d} \tag{2.6}$$

的函数称为**分式线性函数**，其中a、b、c、d是固定的复数，并且$ad-bc\neq0$，这是因为否则线性函数(2.6)就与z无关了．反过来，z也可以用w表示出来：

$$z=\frac{dw-b}{-cw+a}. \tag{2.7}$$

因而由函数(2.6)所决定的对应关系是双方单值的．点$z=-d/c$对应于w平面上的无穷远点，而点$w=a/c$对应于z平面上的无穷远点．

函数(2.6)是一个非常重要、非常有用的函数，它有许多奇妙的性质，这使得它在近代函数论中变成一个非常基本的工具．本书只能涉及它的一些最简单的性质及应用．为此，我们把它

分解为更基本的变换．直接作除法，得

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}}. \tag{2.8}$$

当 $c=0$ 时，(2.8)退化为线性函数，我们在前面已经研究过了，故可设 $c\neq0$．令

$$z_1=z+\frac{d}{c},$$

这是一个平移，再令

$$z_2=\frac{1}{z_1},$$

则
$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-da}{c^2}\cdot z_2.$$

利用前面对线性函数的研究，我们可将分式线性变换 (2.6) 分解为下述四种基本变换：

1） $w=z+a$，

2） $w=e^{i\theta}z$，θ 为实数，

3） $w=rz$，$r>0$.

4） $w=\frac{1}{z}$.

前三种变换我们已经清楚，今看 $w=\frac{1}{z}$. 令

$$z_1=\bar{z}, \tag{2.9}$$

则
$$w=\frac{1}{\bar{z}_1}. \tag{2.10}$$

设
$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta),\text{则}$$

$$z_1=r(\cos\theta-i\sin\theta),$$

这个映射是关于实轴的对称：模相等，而幅角差一负号，即角度改变了方向．这是反向保角的，我们称它为**第二类的保角变换**.

下面看 $w=1/\bar{z}_1$. 设 $w=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，$z_1=r(\cos\theta'+$

$i\sin\theta'$). 那么，我们立刻有 $\rho=\frac{1}{r}$, $\varphi=\theta'$.

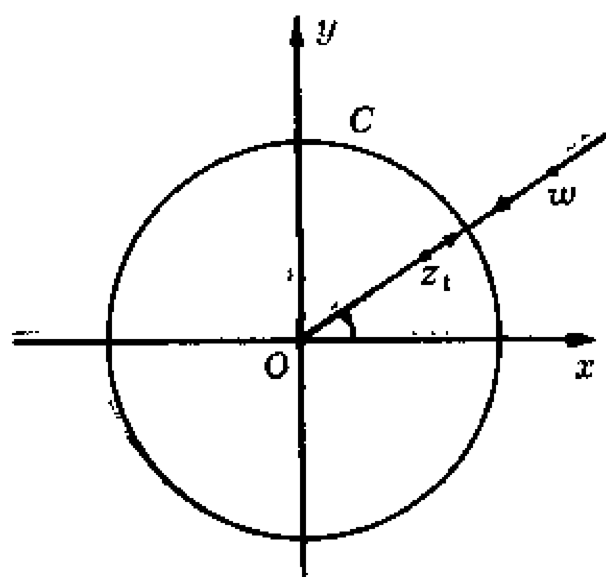


图 2.13

这个变换使幅角保持不变，而模变为倒数. 设 C 表示以原点为圆心以 1 为半径的圆. 这个变换把圆内的点变到圆外，点 w 在 Oz_1 的连线上，它们模的乘积等于 1. 这个变换称为关于圆 C 的反演（图 2.13). 我们把点 z_1 与 w 称为关于圆 C 互相对称. 当 $z_1\to c$ 时，$w\to c$，当 $z_1\to 0$ 时，$w\to\infty$. 这个变换改变了角度的方向，也是第二类的保角变换.

变换 $z_1=\bar{z}$ 与 $w=l/\bar{z}_1$ 复合起来就得到原来的变换 $w=1/z$，它是保角的. 实际上我们可以利用 §1 中关于保角性的讨论直接讨论极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0},$$

看它是否为零. 事实上，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{w-w_0}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}}{z-z_0}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{zz_0}=\frac{1}{z_0^2}.$$

当 $z_0\neq 0$ 时，这个极限不可能取零值，所以由函数 $w=\frac{1}{z}$ 所确定的映射在 $z\neq 0$ 处是保角的.

由此，将四种基本变换复合起来就得出分式线性变换的保角性. 读者也不难借助求极限直接证明之.

分式线性变换的另一个重要性质是它的保圆性，即圆在分式线性变换下的像仍是圆. 不过与 2.2 一样，我们需要对于圆的理解加以推广，这里的圆包括直线，直线理解为半径为无穷大的圆，这样一来，在分式线性变换下，直线或圆的像仍是直线或圆.

由于分式线性变换可分解为

1) $w=az+b$

与

2) $w=\dfrac{1}{z}$

的复合，所以只要证明这一性质对 1) 与 2) 成立就可以了. 圆周的方程可以写为

$$A(x^2+y^2)+mx+ny+l=0. \tag{2.11}$$

当 $A=0$ 时，方程(2.11)表示直线. 方程(2.11)可以写成复形式：

$$Az\bar{z}+\bar{B}z+B\bar{z}+C=0, \tag{2.12}$$

其中 A、C 都是实常数.

$w=az+b$ 的保圆性前面已经讨论过，因而现在只需讨论变换 $w=1/z$ 的保圆性. 把 $w=\dfrac{1}{z}$ 代入(2.12)，得

$$A\frac{1}{w\bar{w}}+\frac{\bar{B}}{w}+\frac{B}{\bar{w}}+C=0,$$

去掉分母得

$$A+\overline{Bw}+Bw+Cw\bar{w}=0. \tag{2.13}$$

方程(2.13)在 w 平面上仍然代表圆周，当 $c=0$ 时，它表示一条直线.

这样，我们看到了，分式线性变换保持圆周不变.

2.4 儒可夫斯基截线

下面我们讨论几个简单函数所实现的保角映射，这些映射

无论在理论上还是在应用中都是很有用的. 这些映射是:

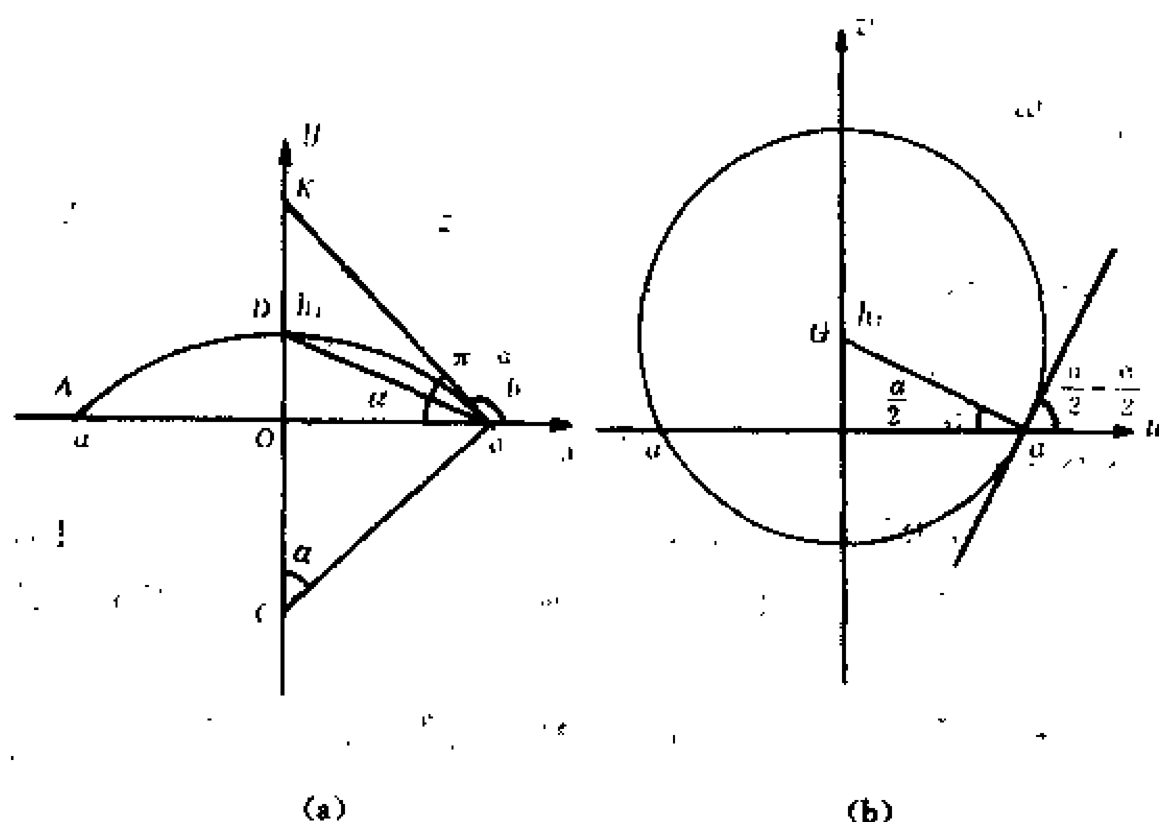
1) $t=\frac{z-a}{z-b}$,

2) $z'=z^2$,

3) $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

最后一个函数叫做儒可夫斯基函数,我们在第一章已经见过了. 它是以俄国科学家儒可夫斯基(Zhukovsky, 1847—1921)命名的, 因为儒可夫斯基成功地将这个函数应用到机翼理论的研究中.

考虑圆弧 l, 它与实轴的交点是 $-a$ 和 a, 与虚轴的交点为 hi, $h>0$. 将沿圆弧 l 有裂缝的 z 平面映射为 w 平面上中心在点 hi 且通过 $-a$ 和 a 的圆 G 的外部(图 2.14).



(a)　　(b)

图 2.14

设在点 a 处弧 l 的切线 BK 与实轴负方向的夹角为 α, 则由

点 a 到 hi 所引的射线与实轴的负方向所夹的角为$\frac{\alpha}{2}$. 事实上，设 C 是弧 l 的中心，A、B、D 分别是数 $-a$、a、hi 的对应点，则$\angle BCD=\alpha$，于是$\angle CDB=\angle DBC=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. 但因$\angle KBC=\frac{\pi}{2}$，所以$\angle KBD=\frac{\alpha}{2}$，因而$\angle DBO=\frac{\alpha}{2}$. 由此可知，在 w 平面上由点 hi 到点 a 的半径与实轴负方向所夹的角也是$\frac{\alpha}{2}$，而在点 a 处圆周的切线与实轴正方向间的夹角等于$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$. 要想求出能实现所要求的映射的函数，需先将沿弧 l 有裂缝的 z 平面和 w 平面上圆 G 的外部映射到同一个辅助区域.

为此，考虑函数

$$t=\frac{z-a}{z+a},$$

它将沿弧 l 有裂缝的 z 平面映射为沿一条射线有裂缝的 t 平面（图 1.15）. 事实上，这是一个分式线性变换，它有保圆性. 它将 a 映到 O，将 $-a$ 映到∞，从而将过 a 与 $-a$ 的圆弧映为过 O 与∞的射线. 当 z 沿实轴由 a 向右移动时，点 t 也沿实轴由 O 向右移动. 这样函数 t 把 z 平面上沿实轴 $z>a$ 的部分映为 t 平面上的正实轴. 由映射的保角性可推得，l 在 t 平面上的像，即那条射线，与正实轴的夹角为 $\pi-\alpha$.

再考虑另一个辅助函数

$$T=\frac{w-a}{w+a}.$$

它将 w 平面上的已给圆周映射为 T 平面上通过原点的直线（图 2. 16）. w 平面的实轴映为 T 平面的实轴，并且当点 w 沿实轴由点 a 向右移动时，点 T 也沿实轴由原点向右移动. 由此可知，w平面上圆 G 的外部映射为包含正实轴的半个 T 平面，它的边

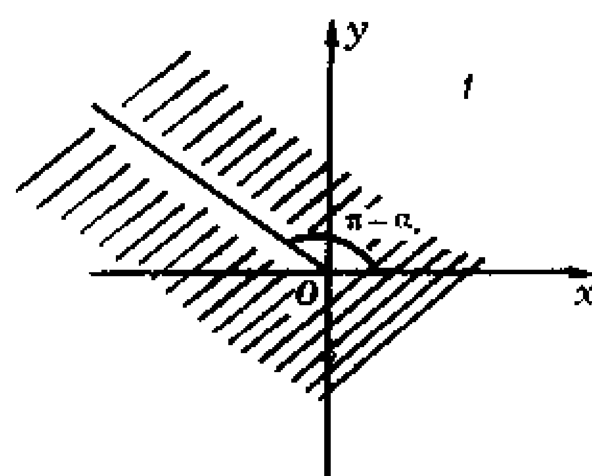


图 2.15

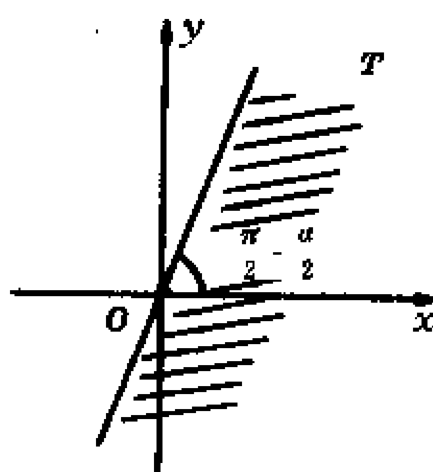


图 2.16

界线与正实轴的交角为$\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$，即 w 平面上已给圆周在点 a 处的切线的斜角.

不难看出，函数

$$t=T^2$$

将半个 T 平面映射为沿与实轴正向夹角为 $2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\pi-\alpha$ 的射线有裂缝的 t 平面.

这样一来，将沿弧 l 有裂缝的平面映为圆 G 外的函数由等式

$$\left(\frac{w-a}{w+a}\right)^2=\frac{z-a}{z+a}$$

确定. 解此方程，得

$$z=\frac{1}{2}\left(w+\frac{a^2}{w}\right),$$

或 $$w=z+\sqrt{z^2-a^2}.$$

因为所得关系式不含 h，所以以连接点 $-a$ 和 a 的任何圆弧为裂缝的 z 平面都映为通过点 $-a$ 与 a 的圆周的外部，这个圆的中心与已给弧和虚轴的交点相重合（如果把 z 平面和 w 平面

看做同一个的话).

w 平面上包含圆 G 且与圆 G 切于点 a 的任何圆的外部，借助于刚才所求得的函数，映射为包含弧 l 的某条闭曲线的外部，这条闭曲线在点 a 处有尖点，尖点处的切线与弧 l 在该点的切线相重合(图 2.17). 这种闭曲线叫做**儒可夫斯基曲线**. 儒可夫斯基曲线的形状依赖于参数 a 和 h，也依赖于两个圆中心的距离 d.

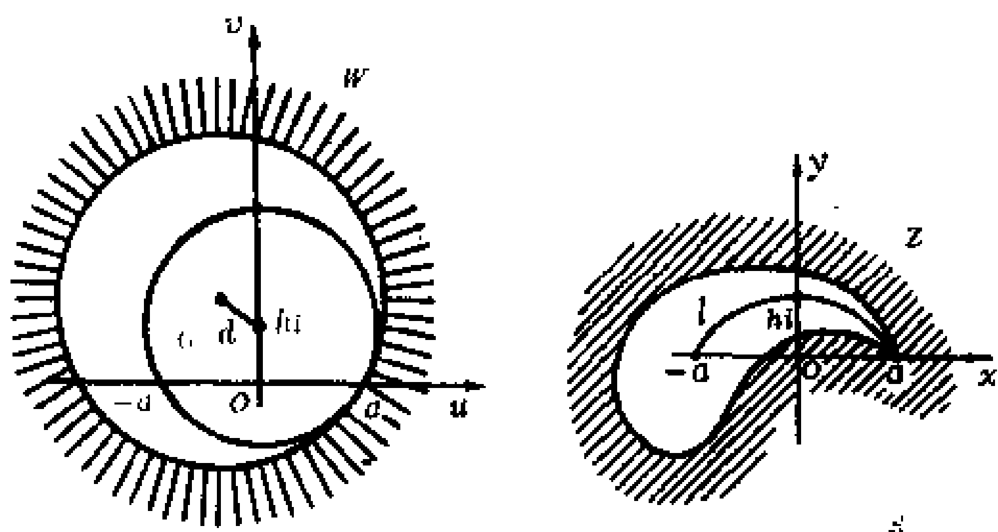


图 2.17

由于将儒可夫斯基曲线的外部映射为圆的外部的函数具有非常简单的形式，这就使得在计算绕儒可夫斯基类型的机翼的环流时变得非常方便.

第三章　法瑞序列与福特圆

§1　法瑞序列

1.1　法瑞序列

法瑞序列是一个叫法瑞（Farey）的矿物学家发现的，1816年他发表了自己的结果，但是没有证明，柯西很快给出了有关结果的证明．在近代数论研究中法瑞序列是一个重要的工具，它可用来研究用有理数逼近实数的问题．

n 级法瑞序列指的是位于 0 与 1 之间的既约分数 $\frac{b}{a}$，其分母 $a \leqslant n$．级为 1、2、3、4、5 的法瑞序列分别是

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1};$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1};$$

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{1};$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1};$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}.$$

这五个序列中的每一个都是以大小为序排列它们的各项的.

n 级法瑞序列用 F_n 表示.

1.2 法瑞序列的性质

在 n 级法瑞序列 F_n 中，任何两个相邻的分数 $\frac{h}{k}$，$\frac{l}{m}$ 总满足下面的关系式

$$\frac{h}{k}<\frac{l}{m}, \tag{1.1}$$

或者

$$hm<kl. \tag{1.2}$$

事实上，法瑞发现了更精确的关系.

定理 1 设 $\frac{h}{k}$，$\frac{l}{m}$ 是 n 级法瑞序列 F_n 中的两个相邻的分数，若 $\frac{h}{k}<\frac{l}{m}$，则

$$kl-hm=1. \tag{1.3}$$

证明：我们用归纳法证明这个定理.

当 $n=1$，2，3，4，5 时，通过直接验证就知道定理成立.

今假设定理对 n 成立. 设 $\frac{a}{b}$ 是一个不在 F_n 中的既约分数，即 $b>n$. 这时 $\frac{a}{b}$ 将位于 F_n 中某两个相邻分数 $\frac{h}{k}$ 和 $\frac{l}{m}$ 之间：

$$\frac{h}{k}<\frac{a}{b}<\frac{l}{m}. \tag{1.4}$$

根据归纳法假设，(1.3) 成立. 现令

$$\lambda=ak-bh>0,$$

$$\mu=-am+bl>0, \tag{1.5}$$

λ、μ 是正整数，这是 (1.4) 的结果. (1.5) 是二元一次方程组，

从中可以将 a、b 解出来：

$$a=\mu h+\lambda l,$$

$$b=\mu k+\lambda m. \tag{1.6}$$

注意在求解的过程中用到了条件（1.3）. 这样一来，满足条件（1.4）的任何既约分数 $\frac{a}{b}$ 都可以借助（1.6）式通过适当的正整数 λ、μ 表达出来.

反过来，对一切 λ、$\mu>0$，我们有

$$\frac{h}{k}<\frac{\mu h+\lambda l}{\mu k+\lambda m}<\frac{l}{m}.$$

事实上，由(1.3)式，$hm<kl$，所以

$$h(\mu h+\lambda m)<k(\mu h+\lambda l)$$

及 $$(\mu h+\lambda l)\ m<l\ (\mu k+\lambda m).$$

这样一来，我们证明了，满足（1.4）的一切既约分数取下述形式：

$$\frac{a}{b}=\frac{\mu h+\lambda l}{\mu k+\lambda m},\ \lambda\geqslant1,\ \mu\geqslant1.$$

分母 b 可取到的最小值是 $n+1$，这时分数 $\frac{a}{b}$ 出现在 $n+1$ 级法瑞序 F_{n+1} 中，而不会出现在 F_n 中，于是，λ 和 μ 必须尽可能地小，也就是说，$\lambda=1$，$\mu=1$. 这样一来，我们有

$$a=h+l,\ b=k+m=n+1.$$

这个新分数

$$\frac{a}{b}=\frac{h+l}{k+m}$$

是满足(1.4)的唯一的属于 F_{n+1} 的分数. 所以在 F_{n+1} 中，它与 $\frac{h}{k}$ 和 $\frac{l}{m}$ 是相邻分数. 现在我们需要证明，这个新分数与它的相邻分数满足(1.3). 事实上，

$$ka-hb=k(h+l)-h(k+m)$$
$$=kl-hm=1.$$
同样地，$lb-ma=l(k+m)-m(h+l)$
$$=lk-mh=1.$$

在 $k+m>n+1$ 的情况，在分数$\frac{h}{k}$和$\frac{l}{m}$之间没有 F_{n+1}中的分数．这时$\frac{h}{k}$与$\frac{l}{m}$就是F_{n+1}中的相邻分数．根据归纳法假设，它们满足（1.3）式．

这样，我们证明了，定理对于 $n+1$ 也是成立的．这就完成了定理 1 的证明．

设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$是 n 级法瑞序列 F_n 中的两个相邻项，我们把分数$\frac{a+c}{b+d}$叫做这两项的中项．我们知道，若$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，则

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}.$$

定理 2 设$\frac{h}{k}<\frac{a}{b}<\frac{l}{m}$是法瑞序列中的相邻项，则

$$\frac{a}{b}=\frac{h+l}{k+m}.$$

证明：由定理 1，

$$ak-bh=1,$$
$$lb-am=1,$$

两式相减，得

$$a(k+m)-b(h+l)=0.$$

此式等价于定理的结论．

1.3 用有理数逼近无理数

设 r 是一个无理数．我们希望用以 k 为分母的有理数去逼

近它，并且希望逼近的程度尽量好．我们用法瑞序列来解决这一问题．考虑 n 级法瑞序列．r 一定位于某两个相邻项 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 之间，即

$$\frac{a}{b}<r<\frac{c}{d}.$$

考虑中项 $\frac{a+c}{b+d}$，r 一定位于中项的某一边：

$$\frac{a}{b}<r<\frac{a+c}{b+d},$$

或 $$\frac{a+c}{b+d}<r<\frac{c}{d}.$$

由于中项不在 F_n 中，我们有 $b+d\geqslant n+1$，所以，或者

$$0<r-\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{b\ (b+d)}\leqslant\frac{1}{(n+1)b},$$

或者 $$0<\frac{c}{d}-r<\frac{c}{d}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{1}{d(b+d)}\leqslant\frac{1}{(n+1)d},$$

这样一来，我们证明了下述定理：

定理 3 对无理数 r 和任一个自然数 n，总存在一个分数 h/k，其分母 $k\leqslant n$，使得

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|<\frac{1}{(n+1)k}.$$

由于 $k\leqslant n$，所以我们有

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|<\frac{1}{k^2}.$$

我们知道有无穷多个法瑞序列，因而也有无穷多个有理数 h/k 满足上述关系式．借助法瑞序列我们还可将上面的结果改得更好．

定理 4 若 r 是无理数，则存在无穷多个分数 h/k，使得

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|<\frac{1}{2k^2},$$

证明：考虑 n 级法瑞序列．那么 r 位于某两个相邻分数 $\frac{a}{b}$ 和

$\frac{c}{d}$之间：

$$\frac{a}{b}<r<\frac{c}{d}.$$

我们希望证明

$$r-\frac{a}{b}<\frac{1}{2b^2} \quad 或 \quad \frac{c}{d}-r<\frac{1}{2d^2}. \tag{1.7}$$

假定不是这样，则我们有

$$r-\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{2b^2} \quad 和 \quad \frac{c}{d}-r\geqslant\frac{1}{2d^2}. \tag{1.8}$$

于是，$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\geqslant\frac{1}{2b^2}+\frac{1}{2d^2}=\frac{b^2+d^2}{2b^2d^2}.$

但是，由（1.3）式，

$$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{cb-ad}{bd}=\frac{1}{bd},$$

所以 $0\geqslant\frac{b^2+d^2}{2b^2d^2}-\frac{1}{bd}=\frac{(b-d)^2}{2b^2d^2}.$

这只有在 $b=d$ 时才可能．由于 $ad-bc=-1$，所以 $b=d$ 蕴涵 $b=d=1$．因此对于 $n>1$ 级法瑞序列（1.8）式不会成立，这就证明了定理 4.

这样一来，又引出了下面的问题：是否存在无穷多个分数 h/k 具有更好的逼近：

$$\left|r-\frac{h}{k}\right|<\frac{1}{ck^2}. \tag{1.9}$$

这里 $c>2$．c 的最大可能值是什么？

定理 5 对任何正数 $c\leqslant\sqrt{5}$，不等式(1.9)有无穷多个解．但是，当 $c>\sqrt{5}$ 时，存在无理数 r，使得不等式（1.9）仅有有限个解.

定理的后半部分是容易证明的．取 $r=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 以及 $0<a<1$，然后找分数 h/k，使它们满足

$$\left|\frac{h}{k}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|<\frac{a}{\sqrt{5}k^2}. \tag{1.10}$$

如果我们写

$$\frac{h}{k}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{\theta}{\sqrt{5}k^2},$$

那么前一不等式指出，$|\theta|<a<1$. 两边乘以 k，并移项，我们得到

$$h-\frac{k}{2}=\frac{\sqrt{5}k}{2}+\frac{\theta}{\sqrt{5}k}.$$

两边平方，并重排各项，得

$$h^2-hk-k^2=\theta+\frac{\theta^2}{5k^2}.$$

上式的左边是整数，当整数 h、k 都不是零时，左边不可能是零，所以我们有

$$1\leqslant\left|\theta+\frac{\theta^2}{5k^2}\right|<a+\frac{\theta^2}{5k^2},$$

或

$$k^2<\frac{a^2}{5(1-a)}.$$

这就限制住了分母 k. 这样对于有限多个 k，h 也只能有有限多个. 这样一来，对于

$$c=\frac{\sqrt{5}}{a}>\sqrt{5},$$

(1. 9) 式只能有有限多个解 h/k.

定理前半段的证明需要用福特圆的概念. 所以我们暂时不去证明定理，而来引进这一新工具.

§2 福特圆

2.1 福特圆的性质

福特圆是由福特(L. R. Ford)引进的一种几何图形，由某些

特殊的圆组成，而这些圆又与法瑞序列密切相关. 在复平面 $z=x+iy$ 上研究这些圆更为方便.

用 $C(h/k)$ 来表示以 $h/k+i/2k^2$ 为中心，以 $1/2k^2$ 为半径的圆. 在复平面上这些圆有下述方程：

$$\left|z-\left(\frac{h}{k}+\frac{i}{2k^2}\right)\right|=\frac{1}{2k^2}. \qquad (2.1)$$

它们都位于上半平面，并且都与 x 轴相切，切点是 $x=h/k$. 这些圆具有下述的一个重要而有趣的性质.

定理 1 两个不同的福特圆从不相交. 它们相切的充要条件是，在某一级法瑞序列中它们的分数是相邻分数.

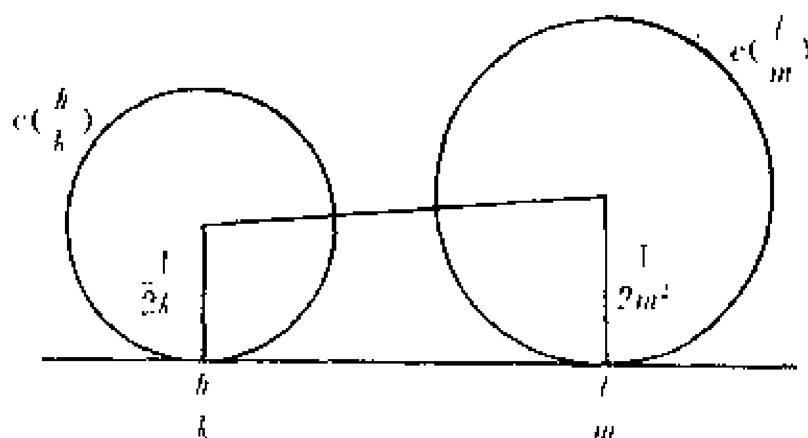


图 3.1

证明：如图 3.1 所示，假定有两个不同的福特圆 $C(h/k)$ 和 $C(l/m)$，其圆心分别是 $h/k+i/2k^2$ 和 $l/m+i/2m^2$，且 $hm-kl\neq0$. 设两个圆心间的距离为 d，则

$$d^2=\left(\frac{h}{k}-\frac{l}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2m^2}\right)^2.$$

这两个圆的半径的和的平方是

$$t^2=\left(\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{2m^2}\right)^2.$$

因为

$$d^2-t^2=\left(\frac{h}{k}-\frac{l}{m}\right)^2-\frac{1}{k^2m^2}$$
$$=\frac{(hm-kl)^2-1}{k^2m^2}\geqslant 0,$$

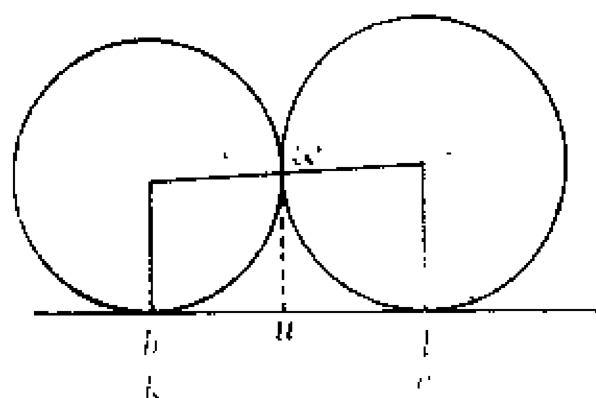


图 3.2

所以这两个圆不会相交．两圆相切的充要条件是等式成立，即当且仅当 $hm-kl=\pm 1$．根据§1定理2，h/k 与 l/m 是某一级法瑞序列中的相邻分数．定理证毕．

在两个圆 $C\ (h/k)$ 和 $C\ (l/m)$ 相切的情况下，不难把切点的坐标找出来．设切点为 $w=u+iv$．由图 3.2，

$$\frac{\frac{l}{m}-u}{u-\frac{h}{k}}=\frac{\frac{1}{2m^2}}{\frac{1}{2k^2}}=\frac{k^2}{m^2},$$

解出 u：

$$u=\frac{hk+lm}{m^2+k^2}. \tag{2.2}$$

值得注意的是，u 是一个有理数．v 的坐标也可类似地算出，结果仍是有理数．这样，我们得到一个有趣的结果：福特圆的切点具有有理坐标．

考虑圆 $C(H/K)$，$C(h/k)$，$C(h_1/k_1)$，其中 $0<K<k<k_1$，并设分数 H/K 和 h/k 在 k 级法瑞序列中是相邻分数．分数 h_1/k_1 不在这个法瑞序列中．如图 3.3 所示，假定这三个福特圆是彼此相切的，由于分数 h_1/k_1 与 h/k 相邻，又与 H/K 相邻，因而它是 h/k 与 H/K 的中项：

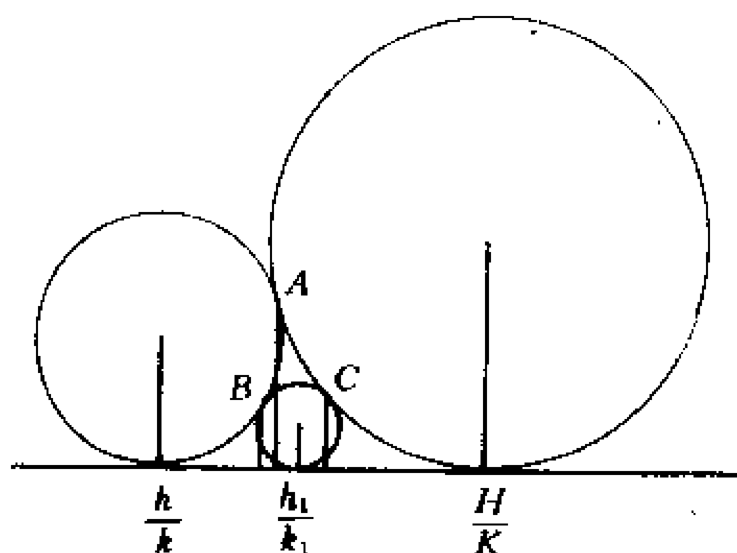


图 3.3

$$\frac{h_1}{k_1}=\frac{H+h}{K+k},$$

它在更高级的法瑞序列中，并且

$$h_1=H+h,\ k_1=K+k. \qquad (2.3)$$

在图 3.3 中，由三段圆弧组成的三角形，称为圆弧三角形 ABC.

我们现在已经做好了证明定理 5 的前半段的准备工作.

2.2 定理 5 证明的完成

设 r 是一无理数. 因为两福特圆的切点的坐标都是有理数，所以直线 $x=r$ 不会通过任何两个福特圆的公共切点. 这样一来，它一定通过无穷多个圆弧三角形的内部.

设其中的一个圆弧三角形是由圆 $C(h/k)$, $C(H/K)$ 和 $C(h_1/k_1)$ 的弧组成的. 我们可以假定

$$\frac{h}{k}<r<\frac{H}{K}, \qquad (2.4)$$

另外还有

$$\frac{h}{k}<\frac{h_1}{k_1}<\frac{H}{K}. \tag{2.5}$$

设圆 $C(h/k)$ 与圆 $C(H/K)$ 的切点是 A，圆 $C(h/k)$ 与圆 $C(h_1/k_1)$ 的切点为 B，而圆 $C(h_1/k_1)$ 与圆 $C(H/K)$ 的切点为 C；设 a、b、c 是 A、B、C 的 x 坐标，由（2.2）式，我们有

$$a=\frac{hk+HK}{k^2+K^2},\ b=\frac{hk+h_1k_1}{k^2+k_1^2},\ c=\frac{h_1k_1+HK}{k_1^2+K^2}.$$

这样一来，

$$\begin{aligned}c-a&=\frac{h_1k_1+HK}{k_1^2+K^2}-\frac{hk+HK}{k^2+K^2}\\&=\frac{HK(k^2-k_1^2)+h_1k_1(k^2+K^2)-hk(k_1^2+K^2)}{(k^2+K^2)(k_1^2+K^2)}\\&=\frac{kK(Hk-hK)+k_1k(h_1k-hk_1)-Kk_1(Hk_1-h_1K)}{(k^2+K^2)(k_1^2+K^2)}\end{aligned}$$

对上式利用§1定理1，可得

$$c-a=\frac{kK+k_1k-Kk_1}{(k^2+K^2)(k_1^2+K^2)}.$$

再利用(2.3)式，最后得出，

$$c-a=\frac{kK+k^2-K^2}{(k^2+K^2)(k_1^2+K^2)}.$$

又设 $s=\dfrac{k}{K}>1$，

于是我们有

$$c-a=\frac{s^2+s-1}{K^2(s^2+1)((s+1)^2+1)},$$

因为 $s^2+s-1>1+1-1=1$，

我们断定 $c-a>0$.

类似地，我们有

$$\begin{aligned}c-b&=\frac{kk_1+Kk+Kk_1}{(k^2+k_1^2)(k_1^2+K^2)}\\&=\frac{K^2+3Kk+k^2}{(k^2+k_1^2)(K^2+k_1^2)}\end{aligned}$$

$$=\frac{s^2+3s+1}{K^2((s+1)^2+1)(s^2+(s+1)^2)}>0.$$

但是,$b-a$ 的符号可以为正,也可以为负.事实上,通过类似的计算,可得

$$b-a=\frac{k^2-kK-K^2}{(k^2+K^2)(k^2+k_1^2)}$$

$$=\frac{s^2-s-1}{K^2(s^2+1)(s^2+(s+1)^2)},$$

这里

$$s^2-s-1=\left(s-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right). \qquad (2.6)$$

由于

$$s-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}>\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}>0,$$

所以 $b-a$ 的符号与

$$s-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

有相同的符号.现在我们来考虑 $b>a$ 和 $b<a$ 这两种情况,因为 $b=a$ 的情况不会出现.

1) $b>a$ 或 $s>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

在这种情况下,我们试图证明,

$$\left|r-\frac{H}{K}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}K^2}.$$

实际上,在这种情况下,圆弧三角形的横坐标的最小值与最大值是 a 和 c,因而我们有

$$a<r<c<\frac{H}{K},$$

从而

$$0<\frac{H}{K}-r<\frac{H}{K}-a$$

$$=\frac{H}{K}-\frac{hk+HK}{k^2+K^2}$$

$$=\frac{k}{K(k^2+K^2)}=\frac{s}{K^2(s^2+1)}.$$

现在

$$\left(s-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)>0.$$

因为根据假定，第一个因子和第二个因子都是正的，这样，

$$s^2-\sqrt{5}s+1>0,$$

或者 $$s^2+1>\sqrt{5}s,$$

$$\frac{s}{s^2+1}<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

所以在这种情况下，我们有

$$0<\frac{H}{K}-r<\frac{1}{\sqrt{5}K^2},$$

这正是我们希望证明的.

2) $b<a$ 或 $1<s<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

这一次我们试图证明

$$\left|\frac{h_1}{k_1}-r\right|<\frac{1}{\sqrt{5}k_1^2}.$$

在现在的假定下(见图 3.4)，

$$b<a<c,$$

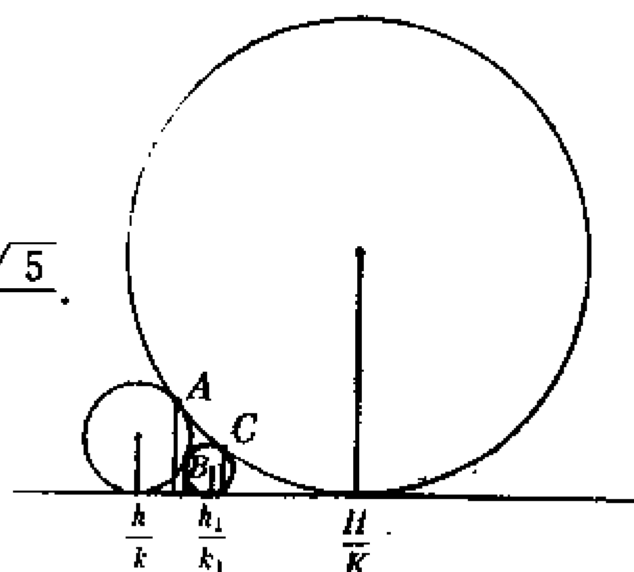


图 3.4

因此

$$b<r<c, \tag{2.7}$$

我们首先推导：

$$\frac{h_1}{k_1}-b>c-\frac{h_1}{k_1}. \tag{2.8}$$

事实上，

$$\frac{h_1}{k_1}-b=\frac{h_1}{k_1}-\frac{hk+h_1k_1}{k^2+k_1^2}$$

$$=\frac{k}{k_1(k^2+k_1^2)},$$

而

$$c-\frac{h_1}{k_1}=\frac{h_1k_1+HK}{k_1^2+K^2}-\frac{h_1}{k_1}$$

$$=\frac{K}{k_1(K^2+k_1^2)},$$

二者相减，我们有

$$\frac{k}{k_1(k^2+k_1^2)}-\frac{K}{k_1(K^2+k_1^2)}=\frac{(k-K)(k_1^2-kK)}{k_1(k^2+k_1^2)(K^2+k_1^2)}$$

$$=\frac{k^3-K^3}{k_1(k^2+k_1^2)(K^2+k_1^2)}>0.$$

这就证明了(2.8)式，由(2.7)式，我们有

$$\frac{h_1}{k_1}-c<\frac{h_1}{k_1}-r<\frac{h_1}{k_1}-b,$$

再利用(2.8)式，

$$\left|\frac{h_1}{k_1}-r\right|<\frac{h_1}{k_1}-b$$

$$=\frac{k}{k_1(k^2+k_1^2)}$$

$$=\frac{s(s+1)}{k_1^2[s^2+(s+1)^2]}.$$

现在我们只需证明

$$\frac{s(s+1)}{s^2+(s+1)^2}<\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

用反证法．假定不是这样，则有

$$\frac{s(s+1)}{s^2+(s+1)^2}>\frac{1}{\sqrt{5}},$$

从而 $\qquad s(s+1)\sqrt{5}>2s^2+2s+1,$

或 $\qquad s^2(\sqrt{5}-2)+s(\sqrt{5}-2)-1>0,$

或 $$0<s^2+s-\frac{1}{\sqrt{5}-2}$$
$$=s^2+s-(\sqrt{5}+2)$$
$$=\left(s+\frac{1}{2}+\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)\left(s+\frac{1}{2}-\frac{2+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=\left(s+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(s-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

这是不可能的，因为我们已经假定了 $s-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<0$.

这样一来，在两种情况下，我们都找到了分数 l/m，使之满足

$$\left|r-\frac{l}{m}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}m^2}. \tag{2.9}$$

这里分数 l/m 是由直线 $x=r$ 所穿过的圆弧三角形 ABC 所确定的. 由于这样的三角形有无穷多个，所以存在无穷多个分数 l/m满足（2.9）式. 这就完成了定理 5 的证明.

第四章　几何作图

§1　用直尺圆规作图

1.1　三大几何难题

从中学时代我们已经熟知，在欧几里得几何中几何作图的工具是直尺与圆规. 这里的尺子与通常的尺子不同，通常用的尺子上面有刻度，而几何中的直尺是没有刻度的，我们只能用它去作连接给定两点的直线. 欧几里得圆规也要与两脚规加以区别. 欧几里得圆规只是为了以给定的点为圆心，通过定点而画圆用的.

仅用直尺与圆规的作图是一个非常古老的课题，早在古希腊时代已经开始研究了. 当时希腊人提出了三个著名的问题，后来被称为三大几何难题，它们是：

1）化圆为方：给定一个圆，求作一个面积与它相等的正方形；

2）三等分任意角：给定一个角，求作两条线三等分这个角；

3）立方倍积：给定一个立方体，求作体积为这立方体体积两倍的立方体.

希腊人不会解这些问题，我们也不必惊奇，因为这些问题都是不可解的，也就是说，不能用直尺和圆规把它们的图作出来. 要证明问题 2）与 3）都是不可解的并不困难，我们将在后面给出. 但要证明问题 1）不可解就不那么简单了，我们只能给出一些说明. 奇妙的是，证明这三大难题不可解的工具在本质上不是几何的而是代数的，所以在代数还没有发展到相当的水平时是不可能解决这些问题的.

但是，正是在研究这些问题的过程中促进了数学发展，两千多年来，三大几何难题引起了许多数学家的兴趣，对它们的深入研究不但给予希腊几何学以巨大影响，而且引出了大量的新发现. 例如，许多二次曲线、三次曲线以及几种超越曲线的发现；后来又有关于有理数域、代数数与超越数、群论等的发展. 在化圆为方的研究中几乎从一开始就促进了穷竭法的发展，而穷竭法正是微积分的先导.

1.2 实数域

我们最熟悉的数是实数，用 R 来表示全体实数的集合. 实数有两种基本的运算，一种是加法，一种是乘法. 减法和除法分别是加法和乘法的逆运算.

实数的加法和乘法满足一些基本性质，我们将它们总结如下：设 a、b、c 是 R 中的数.

性质 1

1） $a+(b+c)=(a+b)+c$；

2） $a+b=b+a$；

3） 存在唯一的元素 $0\in R$，使得 $a+0=a$；

4) 对任意的 $a \in R$，都存在唯一的 $x \in R$，使得 $a+x=0$.

性质 2

1) $a(bc)=(ab)c$；

2) $ab=ba$；

3) 存在唯一的元素 $1 \in R$，使得 $a1=a$；

4) 对任意的 $a \in R$，$a \neq 0$，存在唯一的 $y \in R$，使得 $ay=1$.

性质 3

$$a(b+c)=ab+ac.$$

现代数学的研究范围大大超过了实数集，而研究广泛得多的数学对象. 在许多更一般的数集中也具有上述所述的诸性质，所以有必要抽象出一个一般的概念来概括所有这些研究对象.

代数学家们把满足这些性质的体系叫做**域**. 这样一来，域就是普通的算术律在它里面成立的一个系统.

读者不难看出，上而所述的算术律在全体有理数的集合中是成立的，所以全体有理数对加法和乘法构成一个域，这个域叫**有理数域**，用 Q 表示.

通常用（$-a$）来表示性质 1 4）中的 x，用 a^{-1}表示性质 2 4）中的 y. 这样一来，$a+(-a)=0$，$aa^{-1}=1$.

由下面的式子

$$b-a=b+(-a),$$

$$\frac{b}{a}=ba^{-1} \quad (\text{只要 } a \neq 0)$$

分别定义减法和除法.

根据性质 2 的 4)，0 不能作除数，这样一来，表达式 $x/0$ 没有意义.

1.3 二次扩域

给定 R 的一个子集 F，我们如何确定 F 是不是一个域呢？因为 R 是一个域，所以关于域的大部分性质，如结合律、交换律等，F 中的元素自然是满足的. 需要验证的只是，若 x、y 是 F 的两个元素，是否 $x-y$、x/y 也都是 F 的元素，对后者要求 $y\neq 0$.

设 F 是 R 的一个子域，$k>0$ 是 F 的一个元素. 我们知道 $\sqrt{k}\in R$，今假定 $\sqrt{k}$ 不属于 F.

我们称集合

$$F(k)=\{a+b\sqrt{k}: a,b\in F\}$$

为 F 的一个**二次扩张**.

例如，

$$Q(2)=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Q\}$$

就是有理数域 Q 的一个二次扩张.

定理 1 设 F 是 R 的一个子域，k 是 F 的一个正元素，而 $\sqrt{k}$ 不在 F 内，则 F 的二次扩张 $F(k)$ 也是一个域.

证明：容易证明，若 x，y 是 $F(k)$ 的元素，则 $x-y$，xy 也是 $F(k)$ 的元素. 问题在于证明，对任意的 $x\neq 0$，有 $x^{-1}\in F(k)$.

记 $x=a+b\sqrt{k}$，这里 $a\in F$，$b\in F$.

首先指出，$x=0$ 的充要条件是 $a=b=0$. 事实上，当 $x=0$ 时，必有 $a=-b\sqrt{k}$. 于是若 $a=0$，则 $b=0$，若 $b=0$，则 $a=0$，$b\neq 0$（或 $a\neq 0$）的情况不可能出现，因为这时将有 $\sqrt{k}=-\dfrac{a}{b}\in F$，这与假设是相矛盾的.

若 $x\neq 0$，则必有 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$，从而 $a^2-b^2k\neq 0$，进而有 $a-b\sqrt{k}\neq 0$，这样一来，

$$x^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{k}}=\frac{a-b\sqrt{k}}{(a+b\sqrt{k})(a-b\sqrt{k})}$$

$$=\frac{a}{a^2-b^2k}-\frac{b\sqrt{k}}{a^2-b^2k}.$$

因为 F 是一个域，所以 $a/(a^2-b^2k)$、$-b/(a^2-b^2k)$ 都属于 F. 由此推出 $x^{-1}\in F$. 定理证毕.

由数 0 与 1 经过有限次的加、减、乘、除（零不能作除数）以及对正数的开方运算后得到的数称为**二次不尽根**.

例如，数

$$x=1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{5}}}$$

就是一个二次不尽根.

定义 设 $F_0, F_1, \cdots, F_n$ 都是 R 的子域，再设 $F_0=Q$ 是有理数域，而且每一个域 F_k 都是域 F_{k-1} 的二次扩张 ($k=1,2,\cdots,n$)，则称 F_n 是一个 **n 阶的二次域**.

由上面的定理不难看出，每个二次不尽根，都属于某一个阶的二次域.

设 a，b，$c\in F$，$c>0$，$\sqrt{c}\,\overline{\in}F$. 考虑数

$$a+b\sqrt{c}\in F(c).$$

设 $x=a+b\sqrt{c}$，则数 $a-b\sqrt{c}$ 叫做数 x 的**共轭数**记为 $\bar{x}$：$\bar{x}=a-b\sqrt{c}$.

容易验证，共轭数具有如下的简单性质：

a) $x=0 \iff \bar{x}=0$；

b) $x\bar{x}=a^2-cb^2$；

c) $x=\bar{x}\iff x=a$；

d) $z=x+y\Longrightarrow\bar{z}=\bar{x}+\bar{y}$；

e) $z=xy\Longrightarrow\bar{z}=\bar{x}\,\bar{y}$；

f) $z=x^n\Longrightarrow\bar{z}=(\bar{x})^n$.

这些性质与共轭复数的性质相同. 在中学学复数时，我们曾有这样一个定理：实系数方程的共轭根是成对出现的. 这里我们也有一个类似的定理.

定理 2 设

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

是一 n 次多项式，它的系数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都属于一个由实数构成的域 F. 若 $x_0\in F(c)$ 是多项式 $P(x)$ 的一个根，则 $\overline{x}_0$ 也是 $P(x)$ 的一个根，即

$$P(x_0)=0\Longrightarrow P(\overline{x}_0)=0,$$

证明：由假设

$$a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x_0+a_n=0.$$

利用共轭的性质，两边取共轭，则有

$$a_0\overline{x}_0^n+a_1\overline{x}_0^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\overline{x}_0+a_n=0. \tag{1.1}$$

这就是要证的.

系 设 a_1，a_2，a_3 属于由实数构成的域 F. 若三次多项式

$$x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0 \tag{1.2}$$

在二次扩张 $F(c)$ 中有一个根，则它一定在 F 中还有一根.

证明：由代数基本定理，方程 (1.2) 在复数域中有三个根，不妨设是 x_1，x_2，x_3. 由韦达定理（见第五章 §1，(1.6)），

$$x_1+x_2+x_3=-a_1\in F.$$

若 $x_1\in F\ (c)$，则由定理 2，$\overline{x}_1$ 也是方程 (1.2) 的根，不妨设 $x_2=\overline{x}_1$. 由共轭的定义，$x_1+x_2\in F$. 这样一来，

$$x_3=-a_1-(x_1+x_2)\in F.$$

定理得证.

系指出，若方程 (1.2) 在 F 中没有根，则它在 $F(c)$ 中也不会有根.

我们将把系应用到 F 是有理数域的情况，即假定方程

(1.2)的系数都是有理数，在这种情况下，如果方程（1.2）没有有理根，则它不会有二次不尽根.

不难看出，有理系数的 n 次代数方程可化为整系数的 n 次代数方程. 事实上，只要乘上系数分母的最小公倍数就行了. 我们还需要下面的定理.

定理 3 若整系数的 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0. \tag{1.3}$$

有有理根 $\frac{a}{b}$（是既约分数），则 a 是 a_n 的因数，b 是 a_0 的因数.

证明：将 $\frac{a}{b}$ 代入方程（1. 3），得

$$a_0\frac{a^n}{b^n}+a_1\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{a}{b}+a_n=0,$$

$$a_0a^n+a_1a^{n-1}b+\cdots+a_{n-1}ab^{n-1}+a_nb^n=0.$$

$$a(a_0a^{n-1}+a_1a^{n-2}b+\cdots+a_{n-1}b^{n-1})=-a_nb^n.$$

记着 a 与 b 是互素的，所以 a 是 a_n 的因数. 类似地，用提出公因数 b 的方法可证明，b 是 a_0 的因数.

现在将上面的讨论应用到两个特殊的方程上去.

例 1 证明方程

$$x^3=2 \tag{1.4}$$

没有二次不尽根的解.

证明：由定理 2 的系，我们只需证明这个方程没有有理根. 如果方程（1.4）有有理根 $\frac{a}{b}$，则由定理 3，a 是 2 的因数，b 是 1 的因数，因而它的有理根不外是 1，-1，2，-2. 直接验证就知道它们都不是. 这样一来，方程（1.4）没有有理根，从而也没有二次不尽根的解.

例 2 证明方程

$$8x^3-6x-1=0 \tag{1.5}$$

没有二次不尽根的解.

证明：如果方程 (1.5) 有有理根$\frac{a}{b}$，则 a 是 1 的因子，b 是 8 的因子. 这样一来，方程 (1.5) 的有理根不外是± 1，$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{1}{4}$，$\pm\frac{1}{8}$，直接验证知道它们都不是. 由定理 2 的系，方程 (1.5) 没有二次不尽根的解.

1.4 代数数与超越数

考虑有理系数的多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

凡是这样方程的实数根都称为**代数数**，不是代数数的实数称为**超越数**.

代数数显然是存在的. 是不是所有的实数都是代数数呢？不是的，超越数是存在的，例如数 e 和 π 都是超越数. 抽象地证明超越数的存在性并不困难，但要具体地证明某一个特定的数，例如 e 和 π 是超越数，那是非常困难的. 下面我们来证明超越数的存在性.

我们从集合的计数开始. 如果集合 S 中只含有有限个元素，我们很清楚如何把它数出来. 不妨设这个集合有 n 个元素. 用数学语言来表示，数集合 S 中的元素的个数的过程就是建立自然数集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 与 S 的元素之间的一一对应的过程. 换言之，如果存在一个双方单值的一一映射（下面称这种映射为双射）

$$f: \{1, 2, 3, \cdots, n\} \longrightarrow S,$$

我们就说集合 S 有 n 个元素.

对无限集合如何计数呢？我们引进势的概念. 如果存在一

个双射 $f: A\to B$，就说集合 A 与 B 有相同的势．如果它与全体自然数的集合有相同的势，就称一个集合 S 是可数的．这就是说，对于集合中的每一个元素都能指定一个不同的自然数与之对应．即，S 的元素可安排为一个序列：

$$N: 1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$$

$$S: x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

例如，所有整数构成的集合是可数集．因为我们可以把整数排成如下的顺序：

$$0, -1, +1, -2, +2, \cdots.$$

更精确些，由公式

$$f(n)=\frac{n-1}{2}, n \text{ 为奇数},$$

$$f(n)=-\frac{n}{2}, n \text{ 为偶数},$$

所定义的函数 f 建立了全体自然数与全体整数间的一一对应．

这个例子说明，一个集合能和它自身的一个真子集等势．当然这只能在无限集中才可能．可见，无限集与有限集有着很大的不同．

同样的道理可以证明，如果集合 A 和 B 是可数的，则它们的并 $A\cup B$ 也是可数的．因为 A 能表示成为 $A=\{a_1,a_2,\cdots\}$，同样，$B=\{b_1,b_2,\cdots\}$．因此 $a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots$ 就是对 $A\cup B$ 中的元素的一种计数方式．

下面的定理给出一个更强的结果．

定理 4 若 A_1，A_2，…都是可数集，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 也是可数集．

证明：我们记 $A_1=\{a_1^1,a_2^1,a_3^1,\cdots\}$，$A_2=\{a_1^2,a_2^2,a_3^2,\cdots\}$，…，$A_n=\{a_1^n,a_2^n,a_3^n,\cdots\}$，…．因而 a_k^j 是集合 A_j 的第 k 个元素．定义 $j+k$ 为 a_k^j 的高度，于是 a_1^1 是高度为 2 的唯一元素；同样，a_2^1 和 a_1^2

是高度为 3 的仅有的元素；依此类推. 由于对于任一正整数 $m\geqslant 2$，高度为 m 的元素只有 $m-1$ 个，所以我们可将 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 的元素按其高度排成

$$a_1^1,\quad a_1^2,\quad a_2^1,\quad a_3^1,\quad a_2^2,\quad a_1^3,\cdots$$

或者排成下面的阵列，按箭头所指的顺序去数它们：

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_1^1 & & a_2^1 & \rightarrow & a_3^1 & & a_4^1 & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_1^2 & & a_2^2 & & a_3^2 & & a_4^2 & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & & & \\
a_1^3 & \rightarrow & a_2^3 & & a_3^3 & & a_4^3 & \cdots \\
\cdots & & & & & & &
\end{array}$$

用这种方法可以数出每一个 a_i^j. 这就证明了定理.

这个定理说的是，可数个可数集的并是可数的. 自然地，可数个有限集的并也是可数的.

我们有下面的重要推论：

系 有理数集是可数集.

证明：由于有定理 4，我们只需证明在区间(0,1)上的有理数集是可数的就行了. 但是，在(0, 1) 上的任一有理数都属于某一级的法瑞序列（见第三章 § 1). 读者不难根据法瑞序列的顺序建立(0,1) 间的全体有理数与全体自然数间的双射.

定理 5 全体代数数所成的集合是可数的.

证明：在 1. 3 我们已经指出，只要考虑整系数方程就行了. 设整系数的 n 次方程为

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

这里 a_0，a_1，$\cdots$，a_n 都是整数. 命

$$N=n+|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|,$$

显然 $N\geqslant 2$. 对同一个 N，只有有限个多项式. 每一个多项式的

根数也有限. 所以对应于同一个 N 的代数数也是有限的. 这些代数数所成的集用 E_N 来表示. 现在把它们排列如下:

$$E_2, E_3, \cdots, E_N, \cdots$$

显然,每一个代数数必属于某个 E_k 中. 上面的各集合可能有交. 为此考虑集合 E_N^1: E_N^1 表示在 E_N 中而不在 $E_2, E_3, \cdots, E_{N-1}$ 中的数所成的集合. 这样一来, 我们得到

$$E_2, E_3^1, \cdots, E_N^1, \cdots$$

这是可数个有限集. 由定理 4 可知, 定理 5 成立.

一个无限集如果不是可数的, 就称它是**不可数的**. 粗略地说, 一个不可数集的元素"太多"了, 多到使得我们不能把它们安排在一个序列里.

下面的定理不但告诉我们超越数是存在的, 而且还告诉我们, 超越数比代数数要"多得多".

定理 6 (0,1)间实数所成的集是不可数集.

证明: 若定理不成立, 则可设(0,1)间的实数可排成一个序列:

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

我们将 x_n 表示成十进制小数:

$$x_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4}\cdots$$

我们造一个数 $y \in (0, 1)$, 使得

$$y = 0.b_1b_2b_3b_4\cdots,$$

其中 b_n 由下式定义:

$$b_n = \begin{cases} 8, & a_{nn} \neq 8, \\ 1, & a_{nn} = 8. \end{cases}$$

这个数 y 与序列中的任何一个数都不同, 它不在序列中. 这是一个矛盾. 它指出(0,1)间的实数是不可数的.

这个定理的直接推论就是, 超越数是存在的. 法国数学家

刘维尔在1844年第一次证明了超越数的存在性．令人感兴趣的是，超越数的存在性的证明是非构造性的．我们知道它存在，而且很多，但是，不知道它们都在哪！无怪乎在集合论的创始者康托（Cantor Georg）证明了这个定理的时候，人们以一种相当不欢迎的情绪来接受它．

自然对数的底 e 与 π 都是超越数．证明它们都是超越数是困难的，并吸引着许多数学家付出巨大的劳动去进行研究．直到1873年埃尔米特（Charles Hermite，1822—1901）才给出了 e 是超越数的证明．他认为证明 π 的超越性更困难，他不敢去尝试．他给友人的信中写道："我不敢去试着证明 π 的超越性．如果其他人承担这项工作，对于他们的成功没有比我更高兴的人了，但请相信我，我亲爱的朋友，这决不会不使他们花去一些力气"．九年之后，林德曼（Ferdinand Lindemann，1852—1939）在1882年用实质上与埃尔米特相同的方法证明了 π 的超越性．

1.5 直尺圆规作图

现在回到直尺圆规作图问题．在用直尺和圆规的一切作图中，最终都取决于求

1）两个圆的交点；

2）两条直线的交点；

3）一条直线与一个圆的交点．

借助于解析几何，我们可以容易地把前面的讨论与几何作图问题联系起来．取初始点为(0，0）与(0，1)．我们可以用直尺与圆规作出其它点，其坐标我们都可以通过解两个联立方程来得到，其中每一个方程都是下述两种形式中的一种：

$Ax+By+C=0$ 或 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$.

这里的系数 A、B、C、D、E、F 都以一种简单的方式依赖于已经作出来的点的坐标. 而解这种方程组所用的运算只是加、减、乘、除以及正数的开方. 由此我们得到如下的重要结论：借助直尺圆规可以构造的点的坐标一定可以从 0、1 出发通过有限次的加、减、乘、除以及正数开平方根的运算以后而得到. 这些点是平面上坐标为有理数或二次不尽根的那些点.

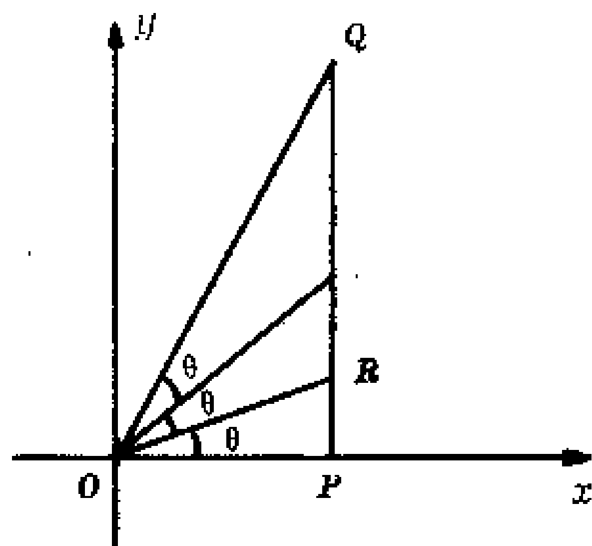


图 4.1

1.6 三等分任意角

如图 4.1 所示，我们从 60°角着手. 设$\angle QOP=60°$，并设线段 OP 的长度为 1. 假定三等分任意角是可能的. 如图设$\angle ROP=20°$. 那么，点 R 的纵坐标一定是有理数或二次不尽根. 这相当于说 $\cos\theta=1/OR$ 是有理数或二次不尽根. 在第一章我们曾得到公式（见第一章(1.10)），

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta.$$

现在 $\cos 3\theta=\cos 60°=\frac{1}{2}$，所以

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{1}{2}.$$

令 $x=\cos\theta$ 并代入上式，得到

$$8x^3-6x-1=0.$$

这正是前面讨论过的方程（1. 5）. 这个方程没有有理根，也没有二次不尽根. 这说明我们的假定是不对的. 这就证明了三等分任意角是不可能的.

1.7 立方倍积

现在考虑立方倍积问题，设给定的立方体是单位立方体，它的两个相邻顶点间的距离是单位长度. 设体积为这立方体体积两倍的立方体的相邻顶点间的距离为 x，则有

$$x^3=2 \text{ 或 } x^3-2=0.$$

如果立方倍积问题可解，我们必须能用直尺和圆规构造出长度为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段. 但是我们在前面已经证明了，方程 (1.4) 没有有理根，也没有二次不尽根，这样一来，立方倍积问题是不可解的.

1.8 化圆为方

考虑半径为 1 的单位圆，它的面积为 π，现在构造一个边长为 x 的正方形，它的面积为 π，于是 $x^2=\pi$，$x=\sqrt{\pi}$. 由于 $\sqrt{\pi}$ 是一个超越数，所以它不可能是二次不尽根，因此"化圆为方"的问题是不可解的.

§2 正多边形

2.1 正多边形作图

几何作图的另一个重要方面是利用直尺和圆规构造正多边形. 早在古希腊时期，欧几里得就在他的《几何原本》的第四篇中论述了圆的内接和外切图形，用直尺圆规作正三角形、正方形、正五边形、正六边形和正十五边形. 再通过连续平分角或弧，就可作出 2^n，3×2^n，5×2^n，15×2^n个边的正多边形. 这

个纪录一直保持了二千年，其间没有任何人能用直尺圆规作出新的正多边形．直到 1796 年高斯才发展了这个理论，他证明了可用直尺圆规作出正十七边形，并完成了这个作图．那时他才 19 岁．高斯认为这个问题的解法具有重大意义，并深感自豪．他希望在他死后在他的墓碑上画一个圆的内接正十七边形．后来，人们遵照他的遗嘱这样做了．

高斯考察了方程

$$z^p-1=0, \tag{2.1}$$

这里 p 是素数．这个方程的根是

$$z_k=\cos\frac{2k\pi}{p}+i\sin\frac{2k\pi}{p},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ p-1. \tag{2.2}$$

从几何上看，这些复数 z_k 就是单位圆上正 p 边形的顶点．正是因为这个原因，方程（2.1）叫做**分圆方程**。

高斯指出，一个素数个边的正多边形可用直尺圆规作图的充要条件是，边数 p 具有如下的形式：

$$p=2^{2^n}+1. \tag{2.3}$$

对于 $n=0$，1，2，3，4，我们有 p 的如下值：

3，5，17，257，65537．

它们都是素数．这些正多边形都可用直尺圆规作出．

形如（2.3）的数叫**费马数**．这些数最初是由法国的一个法官费马（Fermat，1601—1665）引进的．他业余爱好数学，是一位杰出的数学家．正如上面所说的，最初五个费马数都是素数．除了这五个数外，费马没有做进一步的计算，但他坚信所有的这种数都是素数．可惜这个猜想是不对的．再多算一个就可推翻这一猜想．这件事是欧拉作的，他证明了下一个费马数为

$$4294967297=641\times6700417,$$

这个数不是素数.

直尺圆规作图与费马数有这样密切的联系，这是人们所未曾料到的. 高斯的发现引起了人们对费马数的新兴趣. 为了寻找新的费马素数，人们进行了惊人的计算，现在又使用上了电子计算机，但是至今没有发现新的费马素数. 许多数学家倾向于相信不再有其它的费马素数了.

现在再回到正多边形的作图问题. 对于一般的 n，高斯也解决了哪些正 n 边形可以作出来，哪些则不能. 很明显，从一个正 n 边形出发，通过等分它的每一个中心角，就能得到正 $2n$ 边形. 另一方面从一个正 $2n$ 边形出发，只要简单地取它的不相邻的 n 个顶点就能得到正 n 边形. 这说明为了判定哪些正多边形可以作出，只要讨论 n 是奇数的情况就足够了. 高斯证明了，一个具有 n 个顶点的正多边形，当且仅当 n 是一个费马素数或若干个不同的费马素数的乘积时，才能用直尺和圆规作出来.

本节的目的是要证明可用直尺圆规构造正十七边形. 但是在此之前我们还需要一点同余的概念.

2.2 同余

让我们从具体例子出发. 如果我们知道某月的 2 号是星期 1，那末 9 号和 16 号也都是星期 1. 用数学语言来表示就是，16、9 被 7 除余数都是 2. 于是有下面的定义：

定义 给定一个正整数 m，把它叫做模. 如果用 m 去除任意两个整数 a 和 b 所得的余数相同，我们就说 a、b 对模 m 同余，记作

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

如果余数不同，我们就说 a、b 对模 m 不同余，记作

$$a \not\equiv b \pmod{m}$$

例 通过直接计算，不难验证下面的同余式都是成立的：

1）$23\equiv 8 \pmod 5$，

2）$47\equiv 11 \pmod 9$，

3）$-11\equiv 5 \pmod 8$，

4）$81\equiv 0 \pmod{27}$.

我们不拟详细讨论同余式的理论，因为那将远离我们的主题，我们只给出一个下面就要用到的重要事实，而不作理论推导．这一事实是：10^0，10^1，10^2，…，10^{15}对模 17 彼此不同余．事实上，通过具体的数值计算，我们可以把 10 各次方被 17 除的余数列表如下：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
10^n	1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12	(2.4)

这个表下面我们还要用到.

关于上面的事实有一个一般性的定理：对任何奇素数 p，都存在数 m，使得 m^0，m^1，…，m^{p-2}关于模 p 彼此不同余．m 叫做关于模 p 的一个原根．这就是说．我们有定理：

定理 若 p 是奇素数，则模 p 的原根存在.

这个定理的证明可以在华罗庚先生的《数论导引》中找到，或者在闵嗣鹤与严士健合编的《初等数论》中找到.

2.3 正十七边形

现在让我们考虑正十七边形．我们把它看作复平面上的图形，其顶点为复数，分布在以原点 O 为圆心的单位圆上，并且有一个顶点在 1．设 $z=x+iy$ 是任何一个其它顶点，因为$|z|=1$，所以我们可以写成 $z_j=\cos\theta_j+i\sin\theta_j$．$j=1$，2，…，16．因为正十七边形的顶点把圆分为 17 等分，所以 $\theta_j=j\theta_1$，$\theta_1=\frac{2\pi}{17}$.

第十七个顶点又是 1.

$$1=\cos 17\theta_1+i\sin 17\theta_1=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)^{17}=z_1^{17},$$

于是 z_1 是 $z^{17}-1=0$ 的根，因为

$$z^{17}-1=(z-1)(z^{16}+z^{15}+\cdots+1)=0,$$

及 $z_1\neq 1$，所以 z_1 是方程

$$z^{16}+z^{15}+\cdots+1=0 \tag{2.5}$$

的根.

下面，我们求出此根的明显表达式，至少是它的实部 $\cos\theta_1$，或虚部 $\sin\theta_1$ 的表达式.

前面已经指出，模 17 的原根存在，10 就是它的一个原根. 正像我们在表(2.4)中看到的，这些出现在底排的余数彼此不等，并且每个只出现一次. 现将方程(2.5)中的各项进行重排，使得指数按 10 的方幂数被 17 除的余数的顺序排列. 新的排法如下：

$$z+z^{10}+z^{15}+z^{14}+\cdots+z^{8}+z^{12}=-1. \tag{2.6}$$

现在，我们用高斯的方法把(2.6)分成两个和：

$$\eta_1=z+z^{15}+z^{4}+z^{9}+z^{16}+z^{2}+z^{13}+z^{8},$$

$$\eta_2=z^{10}+z^{14}+z^{6}+z^{5}+z^{7}+z^{3}+z^{11}+z^{12}.$$

η_1 是(2.6)中的奇数项，η_2 是(2.6)中的偶数项，我们有

$$\eta_1+\eta_2=-1.$$

乘积 $\eta_1\cdot\eta_2$ 是多少？乘出来共有 64 项. 表面上看很复杂，但如果用一种特殊的方法去计算，事情并不象想象的那样坏. 我们先试着把 η_1 与 η_2 中上下相对应的项乘起来：$z\cdot z^{10}=z^{11}$，$z^{15}\cdot z^{14}=z^{29}=z^{12}$，$z^{4}\cdot z^{6}=z^{10}$，…. 然后把它们加起来，就得到，

$$z^{11}+z^{12}+z^{10}+z^{14}+z^{6}+z^{5}+z^{7}+z^{3}.$$

但是，这正是 η_2！为什么呢？这是因为在(2.6)中，相邻项的 z 的指数差一个以 17 为模的 10 的倍数，于是在 η_1 和 η_2 中相

邻项的 z 的指数差一个以 17 为模 100 的倍数. 比如说，z^a 和 z^b 分别是 η_1 和 η_2 中的项，那么，在 η_1 和 η_2 中的下一项分别是 z^{100a} 和 z^{100b}. z^{a+b}或者在 η_1 中，或者在 η_2 中，z^{100a}. $z^{100b}=z^{100(a+b)}$与 z^{a+b}属于同一个 η_i 中，即或者同属 η_1，或者同属 η_2. 以这种方式，我们总能得到 η_1 的所有项，或者得到 η_2 的所有项. 有一项属于 η_1 就全部属于 η_1，有一个属于 η_2 就全部属于 η_2，因而只要看第一项属于谁即可. 类似地，η_1 的每一项乘以 η_2 中这项下面右边的那一项，所得到的所有的乘积都在同一个 η_i 中，i 是 1 或 2. 因为 $z\cdot z^{14}=z^{15}$在 η_1 中，所以其余的乘积 $z^{15}\cdot z^6=z^4$，…，$z^8\cdot z^{10}=z$ 也都在 η_1 中，并且 8 个乘积的和等于 η_1. 现在我们接着做同样的工作. η_1 的每一项乘以 η_2 中这项下面右边的第二项、第三项，…，等等，再求和. 这样一来，用不了多少计算，我们就得到下面的结果：

$$z^{11}+z^{12}+z^{10}+z^{14}+z^6+z^5+z^7+z^3=\eta_2.$$

$$z^{15}+z^4+z^9+z^{16}+z^2+z^{13}+z^8+z=\eta_1.$$

$$z^7+z^3+z^{11}+z^{12}+z^{10}+z^{14}+z^6+z^5=\eta_2,$$

$$z^6+z^5+z^7+z^3+z^{11}+z^{12}+z^{10}+z^{14}=\eta_2.$$

$$z^8+z+z^{15}+z^4+z^9+z^{16}+z^2+z^{13}=\eta_1,$$

$$z^4+z^9+z^{16}+z^2+z^{13}+z^8+z+z^{15}=\eta_1,$$

$$z^{12}+z^{10}+z^{14}+z^6+z^5+z^9+z^3+z^{11}=\eta_2,$$

$$z^{13}+z^8+z+z^{15}+z^4+z^9+z^{16}+z^2=\eta_1.$$

于是 $\eta_1\eta_2=4\eta_1+4\eta_2=-4$. 由韦达定理，$\eta_1$、$\eta_2$ 满足方程

$$y^2+y-4=0,$$

所以

$$\eta_1,\ \eta_2=\frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{17}\right). \tag{2.7}$$

我们看到了 17 出现在根式下. 在一般情况下，我们从 p 边

形开始，我们能证明 η_1 和 η_2 是二次不尽根，$\pm p$ 将出现在根式下. 类似于从 η 中选出 η_1、η_2，我们从 η_1、η_2 中再取出 η_1'、η_2'、η_3'、η_4'，

$$\begin{aligned} &z+z^4+z^{16}+z^{13}=\eta_1', \\ &z^{15}+z^9+z^2+z^8=\eta_2', \\ &z^{10}+z^6+z^7+z^{11}=\eta_3', \\ &z^{14}+z^5+z^3+z^{12}=\eta_4', \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中

$$\eta_1'+\eta_2'=\eta_1,$$

$$\eta_3'+\eta_4'=\eta_2.$$

我们用同样的方式求 $\eta_1'\cdot\eta_2'$，并得到，

$$z^{16}+z^{13}+z+z^4=\eta_1',$$

$$z^{10}+z^6+z^7+z^{11}=\eta_3',$$

$$z^3+z^{12}+z^{14}+z^5=\eta_4',$$

$$z^9+z^2+z^8+z^{15}=\eta_2',$$

其和是 $\eta_1'\cdot\eta_2'$：

$$\eta_1'\cdot\eta_2'=\eta_1'+\eta_3'+\eta_4'+\eta_2'=\eta_1+\eta_2=-1.$$

于是 η_1'、η_2' 满足方程

$$w^2-\eta_1 w-1=0.$$

从二次方程求根公式得

$$\eta_1',\eta_2'=\frac{1}{2}(\eta_1\pm\sqrt{\eta_1^2+4}). \tag{2.9}$$

类似地，

$$\eta_3',\eta_4'=\frac{1}{2}(\eta_2\pm\sqrt{\eta_2^2+4}). \tag{2.10}$$

这里指出，一旦在(2.7)和(2.9)中取定了符号，在(2.10)中的符号也就选定了. 为了证明这一点，我们展开

$$(\eta_1'-\eta_2')(\eta_3'-\eta_4')=\eta_1'\eta_3'-\eta_1'\eta_4'-\eta_2'\eta_3'+\eta_2'\eta_4'.$$

按照同样的技巧可知，$\eta_1'\eta_3'$是下述诸项之和：

$$z^{11}+z^{10}+z^6+z^7=\eta_3',$$

$$z^7+z^{11}+z^{10}+z^6=\eta_3',$$

$$z^8+z^{15}+z^9+z^2=\eta_2',$$

$$z^{12}+z^{14}+z^5+z^3=\eta_4',$$

所以 $\quad \eta_1'\eta_3'=2\eta_3'+\eta_2'+\eta_4'$；

$\eta_1'\eta_4'$是下述的和：

$$z^{15}+z^9+z^2+z^8=\eta_2',$$

$$z^6+z^7+z^{11}+z^{10}=\eta_3',$$

$$z^4+z^{16}+z^{13}+z=\eta_1',$$

$$z^{13}+z+z^4+z^{16}=\eta_1',$$

所以，$\eta_1'\eta_4'=2\eta_1'+\eta_2'+\eta_3'$；

$\eta_2'\eta_3'$是下述之和：

$$z^8+z^{15}+z^9+z^2=\eta_2',$$

$$z^4+z^{16}+z^{13}+z=\eta_1',$$

$$z^5+z^3+z^{12}+z^{14}=\eta_4',$$

$$z^9+z^2+z^8+z^{15}=\eta_2',$$

所以，$\eta_2'\eta_3'=2\eta_2'+\eta_1'+\eta_4'$；

最后，$\eta_2'\eta_4'$是下述之和：

$$z^{12}+z^{14}+z^5+z^3=\eta_4',$$

$$z^3+z^{12}+z^{14}+z^5=\eta_4',$$

$$z+z^4+z^{16}+z^{13}=\eta_1',$$

$$z^{10}+z^6+z^7+z^{11}=\eta_3',$$

所以，$\eta_2'\eta_4'=2\eta_4'+\eta_1'+\eta_3'$.

于是我们得到：

$$(\eta_1'-\eta_2')(\eta_3'-\eta_4')=2\eta_3'+\eta_2'+\eta_4'-2\eta_1'-\eta_2'-\eta_3'$$

$$-2\eta_2'-\eta_1'-\eta_4'+2\eta_4'+\eta_1'+\eta_3',$$

合并同类项：

$$(\eta_1'-\eta_2')(\eta_3'-\eta_4')=-2\eta_1'-2\eta_2'+2\eta_3'+2\eta_4'$$
$$=-2(\eta_1-\eta_2).$$

这是一个很重要的结果，由此得

$$\eta_3'-\eta_4'=\frac{-2(\eta_1-\eta_2)}{\eta_1'-\eta_2'}. \tag{2.11}$$

现在上式的左边依赖于 η_3' 和 η_4' 在(2.10)中取正号还是取负号，而右边只依赖于 η_1、η_2、η_1'、η_2' 的符号的选取. 于是，我们看到了，η_3'，η_4' 的符号依赖于其它四个符号的分布.

现在我们继续进行分解工作.

把 η_1' 分成

$$z+z^{16}=\eta_1'',$$
$$z^4+z^{13}=\eta_2'',$$

立刻有 $\eta_1''+\eta_2''=\eta_1'$,

$$\eta_1''\eta_2''=z^5+z^{14}+z^3+z^{12}=\eta_4',$$

于是 η_1''、η_2''是方程

$$u^2-\eta_1'u+\eta_4'=0$$

的根，所以

$$\eta_1''、\eta_2''=\frac{1}{2}(\eta_1'\pm\sqrt{\eta_1'^2-4\eta_4'}).$$

最后我们有

$$z+z^{16}=\eta_1'',$$
$$z\cdot z^{16}=1,$$

于是 z 和 z^{16}满足方程

$$z^2-\eta_1''z+1=0. \tag{2.12}$$

把所有这些结果汇集起来，在(2.7)中，设

$$\eta_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{17}),\quad \eta_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{17}),$$

所以 $\eta_1-\eta_2>0.$

如果在(2.9)中，η_1' 仍选上边的符号，则我们有

$$\eta_1'=\frac{1}{2}(\eta_1+\sqrt{\eta_1^2+4}).$$

从而 $\eta_1'-\eta_2'>0.$

再由(2.11)，得

$$\eta_4'-\eta_3'>0.$$

因此在(2.10)中 η_4' 的符号的选取就定了：

$$\eta_4'=\frac{1}{2}(\eta_2+\sqrt{\eta_2^2+4}).$$

进行计算，有

$$\eta_1^2=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2=\frac{1}{4}(18-2\sqrt{17}),$$

$$\eta_2^2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})^2=\frac{1}{4}(18+2\sqrt{17}),$$

因此，$\eta_1'=\frac{1}{4}\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}\},$

$$\eta_4'=\frac{1}{4}\{-1-\sqrt{17}+\sqrt{2(17+\sqrt{17})}\}.$$

这些值对计算 η_1''、η_2'' 是需要的，而 η_1''、η_2'' 符号的选取也是自由的. 设

$$\eta_1''=\frac{1}{2}(\eta_1'+\sqrt{\eta_1'^2-4\eta_4'}),$$

并得到：

$$\eta_1''=\frac{1}{2}\{\frac{1}{4}[-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}]$$

$$+\sqrt{\frac{1}{16}(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})})^2+1+\sqrt{17}-\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\}$$

$$=\frac{1}{8}\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}+\sqrt{R}\},$$

其中

$$R=(-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})})^2+16+16\sqrt{17}$$
$$-16\sqrt{2(17+\sqrt{17})}$$
$$=4\cdot 17+12\sqrt{17}+2(-1+\sqrt{17})\sqrt{2(17-\sqrt{17})}$$
$$-16\sqrt{2(17+\sqrt{17})}.$$

但是，我们有

$$(1+\sqrt{17})\sqrt{2(17-\sqrt{17})}$$
$$=\sqrt{2\sqrt{17}(\sqrt{17}-1)(1+\sqrt{17})^2}$$
$$=\sqrt{2\sqrt{17}\cdot 16(1+\sqrt{17})}$$
$$=4\sqrt{2(17+\sqrt{17})}.$$

与 R 的最后两项相比较，得到

$$R=4\cdot 17+12\sqrt{17}-4\sqrt{2(17-\sqrt{17})}$$
$$-8\sqrt{2(17+\sqrt{17})},$$

于是

$$\eta_1''=\frac{1}{8}\Big\{-1+\sqrt{17}+\sqrt{2(17-\sqrt{17})}$$
$$+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{2(17-\sqrt{17})}-2\sqrt{2(17+\sqrt{17})}}\Big\}.$$

这个量是实的. 我们可从 (2.12) 得到 z 和 z^{16}，它们满足

$$\eta''=z+z^{16}=z+z^{-1}=2\cos\theta_1,$$
$$\cos\theta_1=\frac{1}{2}\eta_1''.$$

这就是正十七边形中心角的余弦.

η_1''的表达式的最重要的特征是，它只包含有理数的加、减、乘以及开方运算. 这个数可以用直尺圆规构造出来. 接下来，$\sin\theta_1$ 也可用直尺圆规构造出来. 这样一来，我们就证明了可用直尺圆规构造正十七边形.

这个证明是属于高斯的，发表在《算术探讨》(Disquisitions Arithmeticae，1801) 中，他对此也深感骄傲，并指出，在此之前，二千年来人们对作正多边形的研究没有新的进展.

从证明中可以清楚看出，高斯的构造依赖于这样的事实：$16=17-1=2^4$. 这就容许我们将问题化为一系列的二次方程的解. 若 p 是形如 2^k+1 的素数，则可用高斯的方法借助直尺圆规构造正 p 边形. 当 k 含有奇数的因素 u 时，2^k+1 不可能是素数. 事实上，令 $k=ul$，并设 $2^l=A$，则

$$2^k+1=2^{ul}+1=A^u+1=(A+1)(A^{u-1}-A^{u-2}+\cdots+1).$$

这样一来，2^k+1 不是素数. 要 2^k+1 是素数，k 必须是 2 的方幂，即 $k=2^n$. 所以我们必须找形如 $2^{2^n}+1$ 的素数，即费马素数.

第五章　代数方程式的根

§1　代数方程式

1.1　一次方程与二次方程

为了使我们的讨论是完备的，使我们能从简单的东西中找出引我们深入的东西，也为了使读者体会到数学家在创立这些理论时所走过的艰苦而漫长的道路，我们就从代数方程最基础的概念开始.

如果方程是一次的，那么它的形状是

$$a_0x+a_1=0,\quad a_0\neq 0,$$

由此解得

$$x=-\frac{a_1}{a_0}.$$

二次方程有如下形式

$$a_0x^2+a_1x+a_2=0,\quad a_0\neq 0.$$

用 a_0 遍除各项后，我们可假定二次方程取

$$x^2+px+q=0 \tag{1.1}$$

的形式．如所周知，这一方程可用“配方法”来解，只要 $p^2-4q\geqslant 0$，我们有

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q,$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

于是我们得到两个解

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}. \tag{1.2}$$

命 $$D=p^2-4q, \tag{1.3}$$

我们称 D 为方程(1.1)的**判别式**.

当 $D>0$ 时，方程（1.1）有两个不同的实根．方程（1.1）有两个重根的充要条件是 $D=0$.

当 $D<0$ 时，方程没有实根．这就是说，对于实系数的二次方程来说，实数域已经不够用了．只有在复数域中才能给出完善的解答．在复数域中，方程（1.1）的解具有形式

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm i\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.$$

前面我们假定了二次方程（1.1）是实系数的，当方程是复系数时，上面的方法依然凑效，并且仍然有两个解.

知道了二次方程的两个根就可将它分解因式，我们有

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

由此不难得出著名的韦达定理：

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1\cdot x_2=q. \tag{1.4}$$

一次方程太简单，没有多少东西可谈，但二次方程却提供

给我们不少信息，如因式分解，根与系数的关系等. 这些将成为我们研究高次方程的重要借鉴.

1.2 三次方程

用配方法解二次方程早在巴比伦时代就已经知道了. 高于二次的方程就是另外一回事了. 解一般的三次方程要困难得多，这使得许多古代数学家的努力都归于失败. 直到 16 世纪初的意大利的文艺复兴时代，这个问题才为意大利的数学家所解决.

设一元三次方程为

$$y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=0. \tag{1.5}$$

下面证明它有三个根，并给出求根公式. 在这之前，我们先给出根与系数的关系. 设 (1.5) 的三个根为 y_1，y_2，y_3，则

$$\begin{aligned} &y^3+a_1y^2+a_2y+a_3=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)\\ =&y^3-(y_1+y_2+y_3)y^2+(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)y-y_1y_2y_3, \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} &a_1=-(y_1+y_2+y_3),\\ &a_2=y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1,\\ &a_3=-y_1y_2y_3. \end{aligned} \tag{1.6}$$

这就是三次方程的韦达公式.

现在回到一般的三次方程 (1.5)，这个方程可化为不含 x^2 项的三次方程：

$$x^3+px+q=0. \tag{1.7}$$

事实上，只要令 $y=x-\frac{a_1}{3}$，代入方程 (1.5)，得

$$\begin{aligned} &\left(x-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(x-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(x-\frac{a_1}{3}\right)+a_3\\ =&x^3-3\cdot x^2\cdot\frac{a_1}{3}+\cdots+a_1x^2+\cdots \end{aligned}$$

式中“…”表示x的一次项及零次项各项. 由此可见，含x^2的项互相抵消了，再合并同类项，得到的就是方程（1.7).

这样一来，问题化为如何解方程（1.7）了. 由二项式定理，

$$(u+v)^3=u^3+3uv(u+v)+v^3.$$

以$x=u+v$代入，则得

$$x^3-3uvx-(u^3+v^3)=0. \tag{1.8}$$

比较方程(1.7)与(1.8)，可得

$$q=-(u^3+v^3), \tag{1.9}$$

$$p=-3uv, \tag{1.10}$$

$$p^3=-27u^3v^3. \tag{1.11}$$

由（1.9）和（1.11）知，u^3、v^3是二次方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0 \tag{1.12}$$

的根. 解方程（1.12)，得

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}. \tag{1.13}$$

所以

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{1.14}$$

这样一来，我们就得到了方程（1.7）的根：

$$x=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}. \tag{1.15}$$

因为立方根在复数域中有三个值，所以（1.14）给予u三个值和v三个值. 但是利用公式（1.15）时，不能取u的任一值与v的任一值相组合；对于u的任一值必须取三个v值中满足条件(1.10)的那个值.

设 u_1 是 u 的三个值中的任一个. 如第一章§1中指出的，u 的其它两个值可用1的立方根 ω 与 ω^2 乘 u_1 来得到：

$$u_2=u_1\omega,\qquad u_3=u_1\omega^2.$$

以 v_1 记 v 的三个值中由(1.10)的关系对应于 u_1 的那值，即 $u_1v_1=-\frac{p}{3}$. v 的另两个值是

$$v_2=v_1\omega,\qquad v_3=v_1\omega^2.$$

因为由 $\omega^3=1$，

$$u_2v_3=u_1\omega\cdot v_1\omega^2=u_1v_1\omega^3=u_1v_1=-\frac{p}{3},$$

所以 u_2 与 v_3 对应；同理 u_3 与 v_2 对应. 这样一来，方程 (1.7) 的三个根是：

$$\begin{cases}x_1=u_1+v_1,\\ x_2=u_2+v_3=u_1\omega+v_1\omega^2,\\ x_3=u_3+v_2=u_1\omega^2+v_1\omega.\end{cases}\tag{1.16}$$

例 解三次方程

$$z^3-3z=0.$$

解：这是一个特别选好的例子，它的解显然是

$$z=0,\ z=\sqrt{3},\ z=-\sqrt{3}.$$

因此容易用它来验证我们的公式.

我们有 $p=-3$，$q=0$. 由 (1.12) 得

$$u^3=i,\qquad v^3=-i.$$

首先考虑 $u^3=i$. 由此解得 u 的三个根：

$$u_1=-i,\ u_2=\frac{\sqrt{3}+i}{2},\ u_3=-\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

由 $v^3=-i$，解得由关系 (1.10) 确定的 v 的三个相对应的值为

$$v_1=i,\ v_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2},\ v_3=-\frac{\sqrt{3}+i}{2}.$$

把 u_i 和 v_i 的对应值加起来，就得到方程式的三个根

$$z_1=0,\ z_2=\sqrt{3},\ z_3=-\sqrt{3}.$$

于是得到了我们已经知道的解.

三次方程的求解公式叫**卡丹公式**. 是意大利米兰的数学和物理教授卡丹 (Cardan，1501 年—1576 年) 最先刊登于 1545 年他所出版的著作《大法》(Ars magna) 里. 他这种方法得之于意大利数学家塔尔塔里雅 (Tartaglia，1500 年—1557 年)，这里有一段有趣的故事. 原来这一问题最初是由意大利数学家齐波·菲洛 (Scipione dal Ferro，1465 年—1526 年) 解决的. 但他没有发表他的解法. 按照当时的风气，人们常把所得的发现保密，而向对手提出挑战，要他们解决同样的问题. 在 1510 年左右，他把他的方法秘传给他的一个学生. 菲洛去世后，这个学生向当时意大利最大的数学家之一的塔尔塔里雅提出挑战，要他解出 30 个三次方程. 塔尔塔里雅起而应战，并且用八天的时间结束了这场竞赛，解出了对手提出的所有 30 个方程，得到了解形如 $x^3+px+q=0$ 的任何三次方程的方法.

当卡丹获悉这一发明后，就央求塔尔塔里雅将秘诀告诉他，并发誓对此保守秘密. 在卡丹的恳求之下，塔尔塔里雅才把他的方法写成一首语言晦涩的诗告诉了卡丹. 但是卡丹背弃了他的诺言，而将方法发表了.

现在回到我们的三次方程. 令

$$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}, \tag{1.17}$$

并称它为三次方程 (1.7) 的**判别式**. 这是因为 D 决定了根的性质.

$D=0$ 是方程 (1.7) 有重根的必要且充分的条件. 事实上，这时 $u^3=v^3=-\frac{q}{2}$，所以

$$x_1=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}},$$

$$x_2=x_3=-(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{\frac{q}{2}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

这是因为 ω 是方程 $x^2+x+1=0$ 的根，所以 $\omega^2+\omega+1=0$，或 $\omega^2+\omega=-1$.

从前面的讨论中我们又一次看到了复数的作用. 复数在本质上是不可缺少的，即使对实系数方程而言也是一样.

1.3 四次方程

在三次方程被成功地解出之后，意大利数学家费拉里(Lodovico Ferrari，1522年—1565年）很快就给出了一般四次方程的解法，并发表在卡丹的《大法》中.

设一元四次方程为

$$y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4=0. \tag{1.18}$$

我们首先指出，这个方程可以化为不含 x^3 项的方程：

$$x^4+qx^2+rx+s=0. \tag{1.19}$$

事实上，令 $y=x-\frac{a_1}{4}$，代入（1.18）得

$$\left(x-\frac{a_1}{4}\right)^4+a_1\left(x-\frac{a_1}{4}\right)^3+\cdots=0,$$

$$x^4-4\cdot x^3\cdot\frac{a_1}{4}+a_1x^3+\cdots=0.$$

式中“…”表示低于 x 的三次方的项. 由此可见含 x^3 的项互相抵消了.

这样一来，问题化为解方程（1.19).

在解四次方程（1.19）以前，我们先回顾一下三次方程(1.7）的解法. 在那里我们引进了一对辅助变量 u、v，以及一

个辅助二次方程

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0,$$

式中 $z=u^3$ 或 v^3. 解出这个方程就可得到三次方程的解. 解四次方程（1.19）与解三次方程（1.7）的基本想法是类似的，不过四次方程更复杂一些. 在解四次方程时需要引进的不是二个辅助变量，而是三个辅助变量 u、v、w. 引进的辅助方程也不再是二次的而是三次的了. 下面我们就来解方程（1.19）.

令 $x=u+v+w$，于是有

$$x^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+vw+wu),$$

$$x^4=(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)$$
$$+4(uv+vw+wu)^2.$$

将所有这些结果代入(1.19),得

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2+v^2+w^2)(uv+vw+wu)$$
$$+4(uv+vw+wu)^2+q(u^2+v^2+w^2)$$
$$+2q(uv+vw+wu)+r(u+v+w)+s=0.$$

注意到

$$4(uv+vw+wu)^2=4[(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)$$
$$+2uvw(u+v+w)],$$

从面得到

$$(u^2+v^2+w^2)^2+2(uv+vw+wu)[2(u^2+v^2+w^2)+q]$$
$$+q(u^2+v^2+w^2)+(8uvw+r)(u+v+w)$$
$$+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+s=0. \qquad (1.20)$$

u、v、w 是三个变数，面这里只有一个方程，要想通过 u、v、w 来确定 x 还必须增加两个条件.

今设

$$2(u^2+v^2+w^2)+q=0,$$

$$8uvw+r=0.$$

即

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{q}{2}, \tag{1.21}$$

$$uvw=-\frac{r}{8}. \tag{1.22}$$

这时(1.20)变为

$$(u^2+v^2+w^2)^2+q(u^2+v^2+w^2)+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+s=0.$$

再把(1.21)代入可得

$$\frac{q^2}{4}-\frac{q^2}{2}+4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+s=0.$$

从而

$$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=\frac{q^2-4s}{16}. \tag{1.23}$$

由 (1.22) 得

$$u^2v^2w^2=\frac{r^2}{64}. \tag{1.24}$$

将 (1.21)、(1.23) 与 (1.24) 结合起来，利用三次方程的根与系数的关系可知，u^2、v^2、w^2 为三次方程

$$z^3+\frac{q}{2}z^2+\frac{q^2-4s}{16}z-\frac{r^2}{64}=0 \tag{1.25}$$

的根. 若这个三次方程的根为 z_1、z_2、z_3，则

$$u=\pm\sqrt{z_1},\ v=\pm\sqrt{z_2},\ w=\pm\sqrt{z_3}.$$

这时 $x=u+v+w$ 有 8 种可能的结合，但由于受到条件 (1.22) 的限制，实际上只有四种结合，这就是四次方程的四个根.

我们看到了，解四次方程要预先解一个形如 (1.25) 的三次方程.

一个重要的事实是，二次方程的根是通过系数的根式来表示的，三次方程与四次方程的根也是通过系数的根式来表示的. 至于五次以上的方程就完全不同了，下面我们还要谈到这一点.

还有一点值得指出，我国对高次方程的研究也开始得很早．早在唐朝，王孝通著的《辑古算经》就记载有方程 $x^3+px^2+qx=A$，并说明“以立方除之”．到了 13 世纪的金元时期，有李冶（1192 年—1279 年），秦九韶（1247 年），杨辉（1261 年—1275 年），朱世杰（1303 年）等，都曾对高次方程提出解法，当时用算筹可以解出十次方程．但在我国古代，数学偏重于应用，只讨论正根，不讨论负根，自然更没有虚根．不过在 13 世纪我们已经能求出高到十次方程的正根，这仍然值得我们自豪．

1.4　五次以上的方程

五次以上的方程如何解？是不是和二次、三次、四次方程一样？它们的根是否可以用系数的根式表出来，只不过是技巧更高超，表达式更为复杂呢？产生这种想法是很自然的．代数发展史本身就是一个很好的说明．

在意大利数学家成功地解出了三次方程和四次方程之后，当时的数学家受到极大的鼓舞，并立刻开始研究高次方程的解法，试图用根式解出五次、六次乃至更高次的方程．这种努力持续了两个半世纪之久，而没有获得成效．自然界一个普遍法则是：量变引起质变．方程次数高到一定程度（这里是五），原来的方法就失效了．当时的数学家做梦也没有想到他们的努力是徒劳的．直到 18 世纪的后半叶，人们才意识到这样一种结局．法国著名数学家拉格朗日在 1770 年—1771 年发表的长文“关于代数方程解法的思考”中指出，用代数运算解一般的高次方程（$n>4$）看来是不可能的．这里代数运算指的是加、减、乘、除、乘方（指数是整数）与开方这六种运算．他说，或者是这个问题超出了人类的智力范围，或者是根的表达性质一定不同于当时所知道的一切．后面这一猜测道出了问题的关键所在．

1824年，当天才的挪威青年数学家阿贝尔（1802年—1829年）的著作出版时，引起了所有数学家的惊奇．他证明了：如果方程的次数 $n\geqslant 5$，并且将方程式的系数看成字母，那么任何一个由这些系数组成的根式不可能是方程的根．原来一切国家的最伟大的数学家三个世纪以来用根式去解五次以上的方程所以不能获得成功，是因为这个问题根本没有解．

§2 代数基本定理

2.1 引言

现在我们转而研究高次方程的根的存在问题．考虑一般的 n 次方程

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0, \qquad (2.1)$$

这里系数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 都是已知的复数．我们假定 x^n 的系数是1，当首项 x^n 的系数不是1时，用 x^n 的系数遍除各项系数．

$n\leqslant 4$ 的情况前面已经研究过了．在这种情况下我们知道，如果把根的重数计算在内，那末 n 次方程有 n 个解．当 $n\geqslant 5$ 时情况怎样呢？是不是 n 次方程仍然恰有 n 个根呢？这就是代数基本定理所要回答的问题．

代数基本定理　n 次方程（2.1）至少有一个实数根或复数根．

这个定理是整个数学中最重要的定理之一，它在代数学中起着基石的作用，因而称它为“代数基本定理”．

代数基本定理的证明是困难的，经过几代数学家的努力才

得出它的严格证明. 不无惊奇的是，就其本质而言，证明方法不是代数的，而是分析的. 代数基本定理的任何一种证明都用到了相当深刻的分析结果. 因而它的任何一个严格证明只能出现在分析的严密化之后. 这之前的任何证明都必然有这样或那样的缺陷. 代数基本定理的第一个证明是达朗贝尔给出的. 他用到了数学分析中的一个命题：定义在有限闭区间上的连续函数一定在某一点取得最小值. 这个命题的严格证明是在18世纪后半叶才得到的，即在达朗贝尔的研究一百年后才得到的.

1799年高斯对代数基本定理给出了他的第一个证明. 他的证明依赖于对复数的承认，从而对巩固复数的地位做出了贡献. 在高斯以及高斯以前那些年代，尽管复数获得了许多卓有成效的应用，人们依然对它怀有疑惧，在当时数学家的眼中复数仍然不是数学大家庭中的合法成员. 高斯的证明也不是完全严格的. 除此之外，当时，高斯还给出了这个定理的三个别的证明，现在已经有了一系列不同的完全严格的证明. 在任何一本复变函数的教材中都可找到它的证明. 下面我们将要给出这个定理的一个比较初等的证明.

2.2 分解因式与韦达定理

只要暂时承认代数基本定理，就可将二次方程与三次方程的韦达定理推广到 n 次方程. 为此，先研究 n 次方程的因式分解. 设

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

是任意给定的 x 的 n 次多项式，其中系数 $a_1,\cdots,a_n$ 是给定的实数或复数. 由代数基本定理，方程

$$f(x)=0 \tag{2.2}$$

至少有一个实根或复根. 设 x_1 是(2.2)的一个根. 以 $(x-x_1)$ 去

除 $f(x)$，由于除式是一次的，因此余数是一个常数 R，即我们有恒等式

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x)+R,$$

式中 $f_1(x)$是一个 $n-1$ 次多项式. 将根 x_1 代入上式就得到 $R=0$. 这样一来，

$$f(x)=(x-x_1)f_1(x).$$

这说明，若 x_1 是 $f(x)=0$ 的一个根的话，$(x-x_1)$就能整除多项式 $f(x)$. $f_1(x)$是一个 $n-1$ 次多项式. 由代数基本定理，它也有一个根 x_2，与前面一样，我们得到

$$f_1(x)=(x-x_2)f_2(x),$$

式中 $f_2(x)$是一个 $n-2$ 次多项式. 这个过程可以继续下去. 这样我们就证明了，多项式 $f(x)$可以表示成一次因式的连乘积的形状：

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n). \tag{2.3}$$

因而每一个 n 次方程有且只有 n 个根. 这些根可以是全不相等的，也可以有一些是相同的. 当有一些根是相同的时候，我们就把相互相同的根的个数叫做这个根的**重数**. 例如 1 是方程

$$(x-1)^2(x+1)=0$$

的二重根.

将 (2.3) 的右边乘开，并与左边 x 的同次幂的系数相比较，我们就得到

$$\begin{aligned}
-a_1&=x_1+x_2+\cdots+x_n,\\
a_2&=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,\\
-a_3&=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots\\
&\cdots\cdots\\
\pm a_n&=x_1x_2\cdots x_n.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

这就是 n 次方程的**韦达公式**.

2.3 子序列

为了证明代数基本定理，我们需要引入子序列的概念，这里指的是序列的一部分项所组成的序列．例如在序列

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

中，由分母是偶数的项所组成的序列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \cdots,\ \frac{1}{2n},\ \cdots$$

就是它的一个子序列．所有分母都是奇数的项组成的序列也是它的一个子序列．这种挑选的规则可以是任意的，因而一个序列的子序列可以有非常多．不难看出，一个序列收敛，则它的子序列也收敛．问题在于，一个序列本身不收敛有时也可以挑选出收敛的子序列．我们感兴趣的是，在什么条件下可以从一个序列中挑选出收敛的子序列？

定理 1 一个有界的复数列有收敛的子序列．

定理 1 的严格证明需要实数的连续性公理．

连续性公理 设给定两个实数列：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots$$

及

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots$$

使得对任何一个 n 都有 $a_n < b_n$，并且

$$b_n - a_n \to 0,\ (n \to +\infty)$$

那么，有且仅有一个实数 c 存在，使得对于一切 n 都有：

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n.$$

连续性公理的几何解释是：如果在实轴上给定一个线段列 $[a_n,\ b_n]$，使得 $[a_{n+1},\ b_{n+1}]$ 包含在 $[a_n,\ b_n]$ 中（见图 5.1），并且线段的长可以任意小，那么有一点 C 存在，它属于一切线段．换言之，线段收缩到一点，而不是“空地”．这就是说实轴

是连续的，而没有断开.

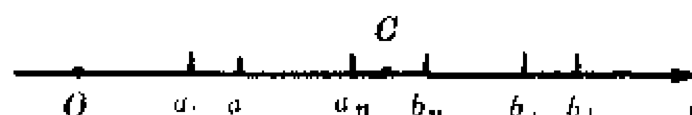


图 5.1

由实数集的连续性出发立刻可得出复数集的连续性.

如果在复平面上给定一串边与坐标轴平行的长方形 Δ_1, Δ_2, …, Δ_n, …（见图 5.2），使得 Δ_{n+1}包含在 Δ_n 里面，并且当 $n\to\infty$时，Δ_n 的对角线趋于 0，那么有且仅有一点属于这串长方形中的每一个. 从图 5.2 看得很清楚，为了证明这个性质，只需将长方形投射到坐标轴上就可以了.

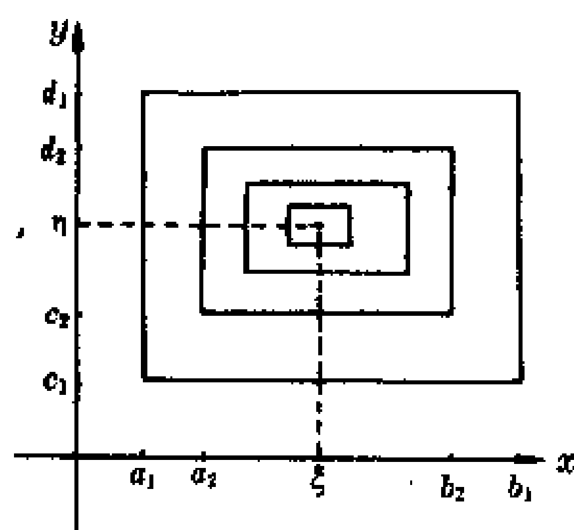


图 5.2

连续性公理有时被称为中国盒公理. 这是因为我国的艺术家们用他们精湛的艺术由一块象牙雕出无数个精致华丽的盒子，这些盒子一个套着一个.

定理 1 常被叫做波尔察诺—魏尔斯特拉斯定理. 现在用连续性公理证明它.

定理 1 的证明：

设复数序列是 $\{z_n\}$，因为它是有界的，所以可用一个边平行于坐标轴的长方形把它们都包起来，将这个长方形记为 Δ_1. 用平行于坐标轴的直线把 Δ_1 分成四个相等的部分，其中至少有一部分含有序列的无穷多项，并把这部分记作 Δ_2；将 Δ_2 再分作相等的四部分，然后取其

中含有无穷多项的那部分，记为 Δ_3；将这一过程无限次地重复下去，就得到一个长方形串 Δ_1，Δ_2，…，Δ_n，…. 根据连续性公理，存在唯一的一点 z_0 属于一切长方形. 现在找出收敛的子序列已不困难了. 这只要依次在 Δ_1 中取出第一项，记为 z_{n_1}，在 Δ_2 中取出第 2 项 z_{n_2}，…，在 Δ_i 中取出第 n_i 项 z_{n_i}，…，不难看出 $\{z_n\}$ 的子序列 $\{z_{n_i}\}$ 收敛到 z_0（图 5.3）.

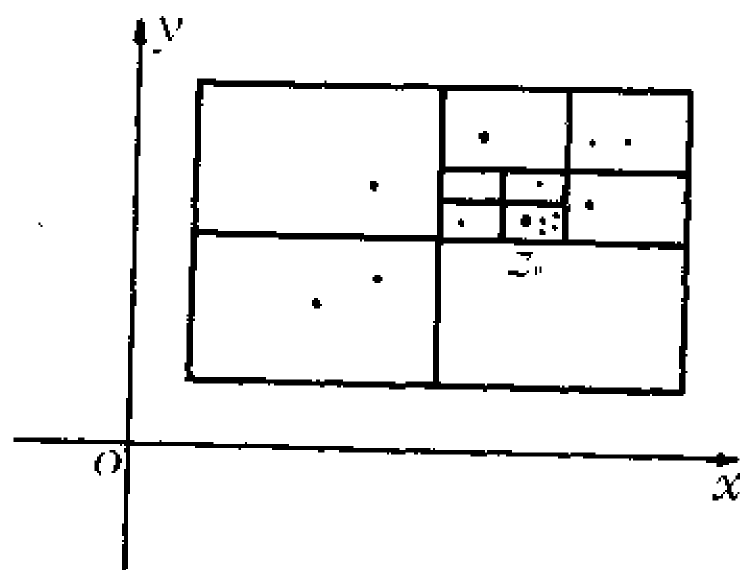


图 5.3

2.4 多项式模的极小值定理

考虑 n 次多项式

$$f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n.$$

我们现在开始给出代数基本定理的证明. 这个证明分为两步：

1) 在复平面上存在一点 z_0，使得对复平面上的任何 z 都有 $|f(z_0)|\leqslant|f(z)|$，即多项式的模在复平面上的某一点取得极小值.

2) 若 z_0 是这样一点使 $|f(z_0)|$ 取得极小值，则 $f(z_0)=0$.

在这一段我们先证明第一部分. 为此我们需要下面的引理：

引理 设多项式 $f(z)$ 的次数 $n\geqslant 1$. 给定一个正数 $M>0$, 存在一个实数 $R>0$, 使得对于一切 $|z|>R$, 都有 $|f(z)|\geqslant M$.

证明: 对多项式的次数 n 作归纳法.

首先, 设 $n=1$, $f(z)=a+bz$, $b\neq 0$. 那么

$$|f(z)|=|a+bz|\geqslant|bz|-|a|=|b||z|-|a|.$$

对于给定的 M, 取 $R=(M+|a|)/|b|$, 于是当 $|z|>R$ 时, $|f(z)|\geqslant M$.

其次, 假定定理对 $k-1$ 次多项式成立. 设 $f(z)$ 的次数是 k, 则 $f(z)=a+zf_1(z)$, $f_1(z)$ 是 $k-1$ 次多项式.

对于给定的 M, 取 $R\geqslant 1$, 使得当 $|z|>R$ 时, $|f_1(z)|>M+|a|$. 于是当 $|z|>R$ 时,

$$\begin{aligned}|f(z)|&=|a+zf_1(z)|\\&\geqslant|z||f_1(z)|-|a|\\&\geqslant|f_1(z)|-|a|\geqslant M+|a|-|a|\geqslant M.\end{aligned}$$

根据归纳法, 引理得证.

现在我们可以证明多项式模的极小值定理了.

定理 2 存在复数 z_0, 使 $|f(z_0)|$ 最小, 即对任何复数 z 都有 $|f(z)|\geqslant|f(z_0)|$.

证明: 设 $|f(0)|=g$. 任取 $G>g$. 根据前面的论述, 存在一个正数 R, 当 $|z|>R$ 时, $|f(z)|>G$.

如果 $g=0$, 即 $f(0)=0$, 则多项式 $f(z)$ 的模 $|f(z)|$ 在点 0 处达到最小值, 因为对任何 z 都有 $|f(z)|\geqslant 0$.

如果 $g>0$, 并且对一切点 z 都有 $|f(z)|\geqslant g$, 那末 $|f(z)|$ 也在 0 点处有最小值. 我们假定存在一点 z, 使 $|f(z)|<g$. 考虑序列

$$0, \frac{g}{n}, \frac{2g}{n}, \cdots, \frac{ng}{n}=g,$$

这是一个递增的序列. 由于对于一切 z 都有 $|f(z)|\geqslant 0$，而存在 z 使 $|f(z)|<g$，所以在上面的序列中一定有一个最大的 $\frac{ig}{n}$，使对一切 z 都有 $|f(z)|\geqslant\frac{ig}{n}$，而存在 z_n 使 $|f(z_n)|<\frac{i+1}{n}g$. 记 $C_n=\frac{ig}{n}$，$C'_n=\frac{i+1}{n}g$.

由于当 $|z|>R$ 时 $|f(z)|>G>g$，所以对于一切 n，都有 $|z_n|\leqslant R$. 因而这些 z_n 构成一个有界点列，其中可能有重复的. 由定理 1，存在一个收敛的子序 z_{n_k} 收敛到一点 z_0：

$$\lim_{k\to\infty} z_{n_k}=z_0.$$

我们来证明，在 z_0 处 $|f(z)|$ 有极小值. 即对任何复数 z 都有 $|f(z)|\geqslant|f(z_0)|$. 事实上，设 z 是任意一点，这时

$$|f(z)|\geqslant C_{n_k}=C'_{n_k}-\frac{g}{n_k}>|f(z_{n_k})|-\frac{g}{n_k}$$

$$=|f(z_0)|+(|f(z_{n_k})|-|f(z_0)|)-\frac{g}{n_k}.$$

令 $k\to\infty$，我们有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{g}{n_k}=0,$$

再由 $|f(z)|$ 的连续性，我们有，

$$\lim_{k\to\infty}(|f(z_{n_k})|-|f(z_0)|)=0.$$

这样一来，我们就得出

$$|f(z)|\geqslant|f(z_0)|.$$

这就完成了定理的证明.

2.5 代数基本定理的证明

下面我们就来证明代数基本定理. 我们有

$$f(0)=a_n.$$

根据前面的论述，总存在一个正数 $M>0$，使得当 $|z|>M$ 时，

$$|f(z)|>|a_n|.$$

现在考虑圆盘 $|z|\leqslant M$. 由定理 2，$|f(z)|$ 在圆盘 $|z|\leqslant M$ 的某一点 z_0 处取得极小值：

$$|f(z_0)|\leqslant|f(0)|.$$

若 $|f(z_0)|=0$，则也有 $f(z_0)=0$，从而代数基本定理得证.

今假定 $|f(z_0)|\neq0$. 考虑多项式 $Q(z)=f(z+z_0)/f(z_0)$. $Q(z)$ 是多项式 $f(z_0+z)$ 除以常数 $f(z_0)$，所以仍是一个 n 次多项式. $|Q(z)|$ 在 $z=0$ 有极小值. $Q(0)=f(z_0)/f(z_0)=1$，从而 $Q(t)$ 可写成下述形式

$$Q(z)=1+az^m+z^{m+1}R(z)\quad(m\geqslant1),$$

这里 $a\neq0$，az^m 是 $Q(z)$ 中系数不为零的次数最低的那一项，$z^{m+1}R(z)$ 表示高次项，$R(z)$ 是复系数的多项式. 在第一章我们曾讨论过方程

$$az^m+1=0,\quad 或\quad z^m+\frac{1}{a}=0$$

的根的求解问题. 设 c 是它的一个根：$ac^m+1=0$ 或 $ac^m=-1$. 这时

$$\begin{aligned}Q(cz)&=1+ac^mz^m+c^{m+1}z^{m+1}R(cz)\\&=1-z^m+c^{m+1}z^{m+1}R(cz).\end{aligned}\tag{2.5}$$

$|Q(cz)|$ 在 $z=0$ 有极小值. 因为多项式在有限圆盘 $|z|\leqslant M$ 上是有界的，所以可以找到一个正数 T，使得 $|R(cz)|\leqslant T$. 根据 (2.5)，

$$\begin{aligned}|Q(cz)|&\leqslant|1-z^m|+|c|^{m+1}|z|^{m+1}|R(cz)|\\&\leqslant|1-z^m|+|c|^{m+1}|z|^{m+1}T.\end{aligned}$$

命 z 沿正实轴趋于 0，这时 $|1-z^m|=1-z^m$，于是，

$$|Q(cz)|\leqslant1-z^m+z^{m+1}|c|^{m+1}T$$

$$=1-z^m(1-z|c|^{m+1}T)$$
$$\leqslant 1-\frac{1}{2}z^m.$$

这是因为当 z 充分小时，$1-z|c|^{m+1}T\geqslant\frac{1}{2}$. 我们证明了，当 z 充分小时，

$$|Q(cz)|<1=Q(0).$$

这与 $|Q(0)|$ 取得极小值是矛盾的，这个矛盾建立了代数基本定理.

2.6 几何解释

我们对代数基本定理作一几何考察. 在每个复数 z 上安置一个立坐标 t，它的长等于多项式 $f(z)$ 在这一点 z 的模 $|f(z)|$. 这些立坐标的端点形成一个曲面，我们把它叫做多项式 $f(z)$ 的模曲面. 因为 $|f(z)|\geqslant 0$，所以这个曲面无论在什么地方也不会降到复平面的下面. 同时我们还注意到，对于复平面上的任一点 z，曲面上有且仅有一点与它对应，换言之，整个曲面在复平面上只有一叶. 由于 $|f(z)|$ 是 z 的连续函数，所以当 z 在复平面上连续变动时，这个曲面的点的立坐标 $t=|f(z)|$ 连续地变动.

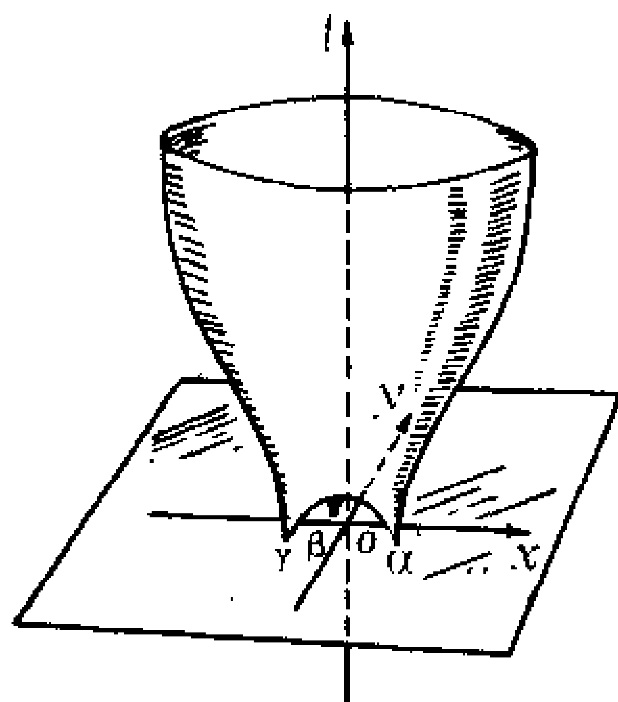


图 5.4

代数基本定理指出，多项式 $f(z)$ 的模曲面至少有一点接触

到复平面. 事实上在 $|f(z)|$ 的每一个极小值处给出 $f(z)$ 的一个根(图 5.4). 极小值的个数等于 $f(z)=0$ 的不同根的个数. $f(z)$ 的模曲面由这些极小值在复平面 z 上支起来.

§3 幅角原理

在许多应用中需要研究多项式的根的分布问题. 在证明了代数基本定理以后，这个问题可以通过下面将要论述的幅角原理来解决.

给了多项式 $f(z)$ 及复平面上的一个区域，需要知道多项式在这个区域里面的根的个数.

我们假定区域 D 是由一条封闭的曲线围住的 (图 5.5)，并且在区域的边界上多项式 $f(z)$ 没有根.

考虑两个辅助平面，一个是区域 D 所在的平面，称为 z 平面，另一个是 w 平面，并假定 $w=f(z)$ 是这个平面上的点. 当 z 在 z 平面上变化时，多项式的值 $w=f(z)$ 就在 w 平面上变化.

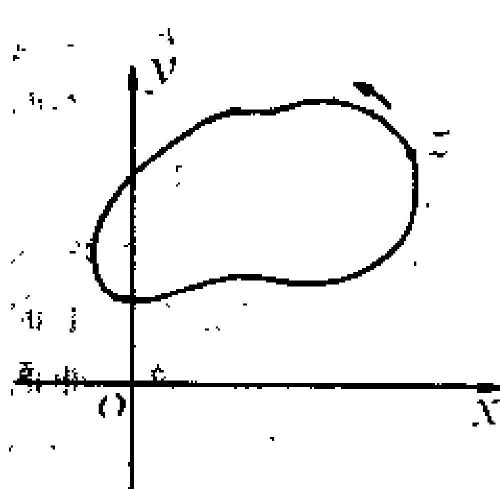


图 5.5

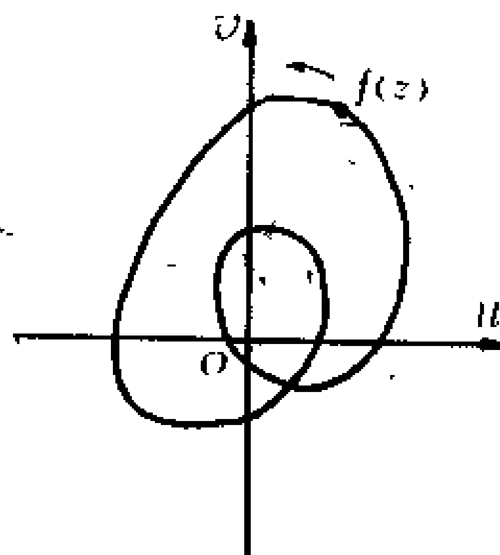


图 5.6

设想点 z 沿区域 D 的边界正向（使区域在边界的左边）通过一次，$f(z)$就在 w 平面上描出一条封闭的曲线(图 5.6).根据假设，$f(z)$在 D 的边界上任何一点都不为零，所以这条曲线不通过原点.

下面的定理给出了问题的解.

定理 1（幅角原理） 设区域 D 由一条闭曲线 C 所围成，假定多项式 $f(z)$在 C 上没有零点，那么，$f(z)$在区域 D 内根的个数等于当 z 沿 C 的正方向通过一次时 $f(z)$绕原点的圈数.

证明：设

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n.$$

根据代数基本定理，$f(z)$可分解为一次因子的乘积

$$f(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n).$$

由复数乘积的幅角等于因子的幅角的和，我们有

$$\arg f(z)=\arg a_0+\arg(z-z_1)+\cdots+\arg(z-z_n).$$

用 $\Delta\arg f(z)$表示 z 绕 C 的正方向环行一周时 $f(z)$的幅角的改变量. 易见，这个量是 2π 的整数倍. 用 $\Delta\arg(z-z_i)$表示 z 绕 C 的正方向环行一周时 $\arg(z-z_i)$的改变量. 于是我们有下述关系式：

$$\Delta\arg f(z)=\Delta\arg a_0+\Delta\arg(z-z_1)+\cdots+\Delta\arg(z-z_n).$$

因为 a_0 是一个常数，其幅角不会改变，所以 $\Delta\arg a_0=0$. $z-z_1$ 可以用从点 z_1 到点 z 的向量来表示. 若 z_1 在 D 的内部，从几何上看，当点 z 沿 C 绕行一周时，向量 $z-z_1$ 以 z_1 为中心绕过一整周(图 5.7)，因此 $\Delta\arg(z-z_1)=2\pi$. 现在假定 z_2 位于区域之外，在这种情况下，当 z 沿 C 绕行一周时，向量 $z-z_2$ 没有绕过 z_2，因此 $\Delta\arg(z-z_2)=0$. 我们可以用这种方法考察 $f(z)$的所有根. 由此我们得出结论：$\Delta\arg f(z)$等于 2π 乘以 $f(z)$在区域内的根的个数. 因此 $f(z)$位于区域内的根的个数等于点 $f(z)$绕原

点的次数，这就是要证明的.

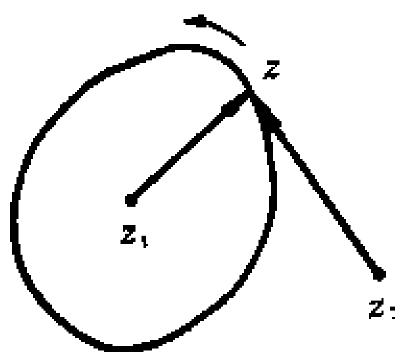


图 5.7

通常我们并不直接用幅角原理来计算某区域内的多项式的根的个数，而借助下面的路西定理来计算.

定理 2(路西定理)　设 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是两个多项式，C 是一条闭曲线. 若在 C 上 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 满足 $|P(z)|>|Q(z)|$，则在 C 的内部 $P(z)+Q(z)$ 和 $P(z)$ 有相同的零点个数.

证明：我们利用幅角原理来求 $P(z)+Q(z)$ 的零点个数. 在曲线 C 上将 $P(z)+Q(z)$ 改写为

$$P(z)+Q(z)=P(z)\left\{1+\frac{Q(z)}{P(z)}\right\}.$$

注意，在曲线 C 上，$|P(z)|>|Q(z)|$，所以 $P(z)$ 在 C 上不会为零. 于是

$$\arg[P(z)+Q(z)]=\arg P(z)+\arg\left\{1+\frac{Q(z)}{P(z)}\right\}.$$

但是 $\left|\frac{Q(z)}{P(z)}\right|<1$，所以向量 $1+\frac{Q(z)}{P(z)}$ 的终点画出一条闭曲线，整个这条闭曲线都在以 1 为中心，以 1 为半径的圆内. 因此这个向量没有绕原点转圈. 于是当 z 绕行 C 一周后，$\arg\left\{1+\frac{Q(z)}{P(z)}\right\}$ 的值没有改变. 所以

$$\Delta\arg[P(z)+Q(z)]=\Delta\arg P(z).$$

由幅角原理推出，$P(z)+Q(z)$ 和 $P(z)$ 在 C 内有相同个数的根.

例　求在 $|z|<1$ 内方程

$$z^8-4z^5+z^2-1=0$$

的根的个数.

解：我们利用路西定理. 先将 $z^8-4z^5+z^2-1$ 表示成 $P(z)$

$+Q(z)$的形状，其中 $P(z)=-4z^5$，$Q(z)=z^8+z^2-1$. 在 $|z|=1$ 上，

$$|Q(z)|=|z^8+z^2-1|\leqslant|z^8|+|z^2|+1=3,$$

$$|P(z)|=|4z^5|=4,$$

所以 $$|Q(z)|<|P(z)|.$$

根据路西定理，$P(z)+Q(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ 在圆 $|z|<1$ 的零点个数与 $P(z)=-4z^5$ 的零点个数相同. 但 $P(z)$ 在 $|z|<1$ 的零点个数是 5，所以方程 $z^8-4z^5+z^2-1$ 在单位圆内的零点个数也是 5.

第六章　整函数与毕卡小定理

§1　整函数

1.1　整函数的概念

前面我们详尽地讨论了多项式的零点问题，从中我们看到了数学家们在解决这一问题的过程中所走过的漫长而光辉的道路．代数基本定理的发现与证明是数学史上的一个丰碑，它是几代数学家艰苦努力的结果．即使到了现代，仍有一些数学家在探索给出它的更简单的证明．人们总是在不断地深化对事物的理解，丰富对事物的认识，而不会停留在一个水平上．当数学家们解决了一个问题之后，会立刻向自己提出新的问题，并开始向更高的目标前进．

例如，人们自然会想到，可不可以把多项式的概念加以推广？怎样才能把多项式的概念推广到更一般的函数类去？在更一般的函数类中零点的分布如何？还有没有代数基本定理的类似定理？

代数基本定理所处理的是次数 n 为任意的多项式的根的问题. 但次数不管多高，它总是有限的. 推广多项式的概念，必须打破次数是有限的这一限制，而引进“无穷高次”多项式的概念. 这一推广在古代是做不到的，因为从有限进入无限需要以极限概念为基础，而极限概念尽管出现很早，但只有到了牛顿、莱布尼兹发现微积分时才真正发展起来，而一直到了 19 世纪才告完善.

“无穷高次”多项式只是一种形象化的语言，它的确切表达是整函数，这是在 19 世纪后期才迅速发展起来的一个数学分支，在 20 世纪初期达到高潮，现在仍然是数学家们研究的一个重要课题.

我们从中学中已经熟知的几何级数出发开始我们的讨论. 几何级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \tag{1.1}$$

以 x 为公比. 当 $|x|<1$ 时

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

这时称级数 (1.1) 是收敛的，称 $\frac{1}{1-x}$ 为级数的和. 这就是说，下述极限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1}{1-x},\quad |x|<1. \tag{1.2}$$

但是当 $|x|>1$ 时，(1.1) 不收敛，即极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k$$

不存在.

形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1.3}$$

的级数称为**幂级数**. 处处收敛的幂级数是多项式的自然推广. 如果 (1.3) 中从某一个 $n+1$ 开始所有的系数都转化为 0，那么，作为这种幂级数的特殊情况，我们就得到次数不超过 n 的多项式：

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

下面是级数处处收敛的一个简单判别法——达朗贝尔判别法.

$$\text{若}\qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0, \tag{1.4}$$

则级数 (1.3) 处处收敛.

证明：在 $x=0$ 时，级数 (1.3) 明显是收敛的. 今设 $x\neq 0$. 由条件 (1.4) 我们可以找到这样的 N，使得当 $n>N$ 时，不等式

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{1}{2|x|}\quad\text{或}\quad |a_{n+1}|\,|x|<\frac{1}{2}|a_n|$$

成立. 因而从 $N+1$ 项开始，我们有

$$|a_{N+1}x^{N+1}|<\frac{1}{2}|a_Nx^N|,$$

$$|a_{N+2}x^{N+2}|<\frac{1}{2}|a_{N+1}x^{N+1}|<\frac{1}{2^2}|a_Nx^N|,$$

$$\cdots$$

$$|a_{N+k}x^{N+k}|<\frac{1}{2^k}|a_Nx^N|,$$

$$\cdots$$

这意味着当 $n>N$ 时，级数 (1.3) 的所有项比绝对值以 $\frac{1}{2}$ 为公比的几何级数的项来得小. 所以级数 (1.3) 不但收敛，而且取绝对值后仍收敛，我们称之为**绝对收敛**.

例 读者利用达朗贝尔判别法很容易验证下面的幂级数都是处处收敛的：

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$$

定义 处处收敛的幂级数(1.3)的和叫做整函数.

依定义，上述幂级数的和函数都是整函数.

迄今为止，我们所研究的整函数都是实系数的，而且变量 x 取实值. 但这是不必要的. 没有什么会妨碍我们在复数的范围内研究幂级数，只要将 (1.4) 中的绝对值理解为复数的模，并假定这个条件仍满足就行了. 因为这个条件保证了级数的绝对收敛性. 以下我们仍用 z 表示复变量，而用 x、y 表示实变量.

前面例中的前三个依次收敛到 e^x，$\cos x$ 和 $\sin x$，其证明超出了本书的范围. 我们承认它们的合法性，这并不影响我们对下面内容的理解. 将自变量写为 z，于是我们有

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots \tag{1.5}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots \tag{1.6}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \tag{1.7}$$

1.2 解析函数

设 $w=f(z)$是定义在区域 D 内的一个函数，如果对于区域内的每个点 z_0，都可指出它的一个邻域，在这个邻域中函数

$f(z)$可以表示为 $z-z_0$ 的幂级数：

$$w=f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+c_n(z-z_0)^n+\cdots \tag{1.8}$$

那么，这个复函数叫做在这个区域 D 内的**解析函数**.

特别地，当区域 D 是以 z_0 为中心的圆时，要 $f(z)$ 在 D 内是解析的，只要级数(1.8)在整个圆内表示 $f(z)$ 就可以了.

为了得到 $f(z)$ 在这个圆内的另外任意一点 z_1 的邻域中的幂级数展式，只要在(1.8)中把 $z-z_0$ 表示为

$$z-z_0=(z-z_1)-(z_0-z_1),$$

然后按 $(z-z_1)$ 的幂展开幂级数 $c_n(z-z_0)^n$ 的每一项，再把 $(z-z_1)$ 的同次幂归并在一起.

整个复平面可视为半径为无穷大的圆，中心可以在任何点，上面的论述对于全平面当然也是有效的. 在公式(1.8)中取 $z_0=0$，并要求级数在全平面收敛. 于是，整函数 $f(z)$ 可定义为在整个复平面上解析的复函数.

整函数是解析函数的特殊情况.

1.3 幂级数的性质

处处收敛的幂级数有许多有限和的性质. 对幂级数施行加法、减法和乘法运算，像对依 z 的升幂排列的多项式施行相应的运算一样，服从相同的法则. 例如，若

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$
$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots,$$

则

$$f(z)\pm g(z)=a_0\pm b_0+(a_1\pm b_1)z+(a_2\pm b_2)z^2+\cdots$$
$$+(a_n\pm b_n)z^n+\cdots$$

$$f(z)g(z)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2$$

$$+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)z^n+\cdots.$$

如果我们还知道，对于任何的 z，$g(z)$都不为零，那么可以断言 $f(z)/g(z)$也是整函数. 相应的幂级数由 $g(z)$的幂级数去除 $f(z)$的幂级数得到，除法法则与排列好的多项式的除法法则相同.

我们来做这一运算的前几步：

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \,\Big|\, b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots$$

$$\frac{a_0}{b_0}+\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}z+\cdots$$

$$-a_0+\frac{a_0b_1}{b_0}z+\frac{a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots$$

$$\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\frac{a_2b_0-a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots$$

$$-\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\frac{(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots$$

$$\frac{(a_2b_0-a_0b_2)b_0-(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots$$

于是，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots,$$

这里

$$c_0=\frac{a_0}{b_0},\quad c_1=\frac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2},\cdots.$$

可以证明一个一般的公式，由商的前 n 项系数 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$表示第 n 项系数 c_n：

$$c_n=-\frac{c_0b_n+c_1b_{n-1}+\cdots+c_{n-1}b_1}{b_0}. \tag{1.9}$$

1.4 欧拉公式

现在我们将这些性质运用到指数函数 e^z 与三角函数 $\sin z$

与 $\cos z$ 上面去.

设 $z=iw$，这里 w 仍是复数，并将它代入公式（1.5）中，我们得到，

$$e^{iw}=1+\frac{iw}{1!}-\frac{w^2}{2!}-\frac{iw^3}{3!}+\frac{w^4}{4!}+\cdots$$
$$=\left(1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\cdots\right)+i\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}+\cdots\right)$$

与公式（1.6）与（1.7）比较，我们看出

$$e^{iw}=\cos w+i\sin w \qquad (1.10)$$

这就是著名的欧拉公式. 指数函数可以通过三角函数来表示. 由此可见，在整函数的领域中，指数函数与三角函数是亲缘最近的.

我们还要注意到，在 $\cos z$ 的展式中只含 z 的偶次幂，因而 $\cos(-z)=\cos z$，$\cos z$ 是偶函数，在 $\sin z$ 的展式中只含有 z 的奇次幂，因而 $\sin(-z)=-\sin z$，$\sin z$ 是奇函数.

在公式(1.10)中，将 w 换成 $-w$，就得到

$$e^{-iw}=\cos w-i\sin w. \qquad (1.11)$$

公式(1.10)与(1.11)逐项相加，得到

$$\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}. \qquad (1.12)$$

公式(1.10)减去公式(1.11)，得到

$$\sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}. \qquad (1.13)$$

这是用指数函数表示三角函数的欧拉公式.

1.5 指数函数与三角函数

从级数相乘的例子我们可以构造出 e^{z_1} 的级数与 e^{z_2} 的级数的乘积，这里 z_1、z_2 是两个任意复数. 因为

$$e^{z_1}=1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\cdots,$$

$$e^{z_2}=1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}+\cdots,$$

所以

$$\begin{aligned}e^{z_1}e^{z_2}=&1+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)+\\&+\frac{1}{3!}\left(z_1^3+\frac{3!}{2!\ 1!}z_1^2z_2+\frac{3!}{1!\ 2!}z_1z_2^2+z_2^3\right)+\cdots\\&+\frac{1}{n!}\left(z_1^n+\frac{n!}{(n-1)!\ 1!}z_1^{n-1}z_2+\frac{n!}{(n-2)!\ 2!}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots\right.\\&\left.+\frac{n!}{1!\ (n-1)!}z_1z_2^{n-1}+z_2^n\right)+\cdots\\=&1+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1+z_2)^2+\frac{1}{3!}(z_1+z_2)^3+\cdots\\&+\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n+\cdots\end{aligned}$$

由此得出

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{1.14}$$

这个公式叫做指数函数的**加法定理**:两个指数函数相乘时,对应的指数相加.

特别地,设 $z_1=z$, $z_2=-z$,则有

$$e^z\cdot e^{-z}=e^0=1. \tag{1.15}$$

这个公式指出,乘积 $e^z\cdot e^{-z}$ 不等于零. 这说明指数函数 e^z 永不为零. 也就是方程式

$$e^z=0$$

既没有实根也没有虚根.

把(1.10)与(1.11)乘起来,我们得到

$$\begin{aligned}e^{iw}\cdot e^{-iw}&=(\cos w+i\sin w)(\cos w-i\sin w)\\&=\cos^2 w+\sin^2 w.\end{aligned}$$

再由等式(1.15)得:

$$\cos^2 w+\sin^2 w=1. \tag{1.16}$$

这个公式是我们在初等数学中非常熟悉的，但那时仅对实的 w 成立，现在我们证明了当 w 是任意复值时它也成立. 这里指出，在初等数学中我们所证明的那些三角恒等式((1.16)仅是其中之一)，无例外地对任意复数都成立.

在等式(1.14)中，设 $z_1=z$ 是一个任意的复数，设 $z_2=2\pi i$，我们得到，

$$e^z\cdot e^{2\pi i}=e^{z+2\pi i}.$$

由欧拉公式(1.10)

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1,$$

因此 $$e^z=e^{z+2\pi i}. \qquad (1.17)$$

这说明，指数函数 e^z 是以纯虚数 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

由此出发又可证明对任意的复数 z，$\sin z$ 与 $\cos z$ 仍是以 2π 为周期的周期函数：

$$\cos(z+2\pi)=\cos z,\quad \sin(z+2\pi)=\sin z.$$

事实上，由欧拉公式(1.12)，

$$\cos(z+2\pi)=\frac{1}{2}(e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{iz+2\pi i}+e^{-iz-2\pi i})$$

$$=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}).$$

类似地，由欧拉公式(1.13)可证明 $\sin(z+2\pi)=\sin z$.

现在来计算 e^z 的模和幅角. 由公式(1.14)，

$$e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}$$

而 $$e^{iy}=\cos y+i\sin y,$$

所以 $$e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

由复数的三角表示，立刻得到：

$$|e^z|=e^x,$$

$$\mathrm{Arg}(e^z)=y+2n\pi.\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

§2 毕卡小定理

2.1 方程 $e^z=A$

在介绍毕卡小定理之前，我们先来研究一些具体例子. 首先看方程

$$e^z=A, \tag{2.1}$$

这里 A 是任意复数. 前面已经指出，当 $A=0$ 时，方程 (2.1) 没有任何解. 这是一件很有意思的事情. 在多项式的情况下，代数基本定理指出，对任何的复数 A，方程

$$P(z)=A$$

总有 n 个解，这里 $P(z)=a_0+\cdots+a_nz^n$, $a_n\neq0$. 但是，对于"无穷高次多项式"，即对于整函数，这个结论不再成立，至少对某些 A 不再成立. 这说明量变引起了质变，不能把代数基本定理原封不动地搬到整函数上去. 必须做某些修正. 不过，我们还是先把方程 (2.1) 弄清楚为好. 既然 $A=0$ 没有解，我们设 $A\neq0$. 由复数 e^z 与 A 相等得出，它们的模相等，而幅角可以差 2π 的整数倍. 所以

$$\begin{cases} e^x=|A|, \\ y=\arg A+2n\pi, \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots) \end{cases} \tag{2.2}$$

因此，

$$x=\log|A|,$$

$$z=x+iy=\log|A|+i\ (\arg A+2n\pi) \tag{2.3}$$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

这样一来，方程（2.1）的任何一个根都包含在公式（2.3）中.反过来，形如（2.3）的每一个数都是这个方程的根. 事实上，

$$e^z = e^{\log|A|+i(\arg A+2n\pi)} = e^{\log|A|}e^{i(\arg A+2n\pi)}$$

$$= |A|e^{i\arg A} = |A|[\cos(\arg A)+i\sin(\arg A)] = A.$$

这就证明了，方程（2.1）对于任何的复数 A，除去一个例外值 $A=0$，都有无穷多个根. 换言之，无穷高次方程

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=A$$

对任何复数 $A\neq 0$ 有无穷多个根.

自然地，方程（2.1）的每一个根叫做复数 A 的（自然）**对数值**. 以 e 为底产生 A 的幂指数一般记为 $\ln A$. 由此公式（2.3）可改写为下面的形式：

$$\ln A = \ln|A| + i\mathrm{Arg}A \qquad (2.4)$$

$$= \ln|A| + i(\arg A + 2n\pi),\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

由此得到，任何复数有无穷多个对数值，它们彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍. 而

$$\ln A = \ln|A| + i\arg A$$

称为**对数的主值**.

若把公式（2.4）中的 A 当作自变数，把它所对应的值 z 当作因变数，即当作 A 的函数来研究，那么，我们就得到函数 $z=\ln A$，这个函数称为**对数函数**（以 e 为底）. 它是指数函数 e^z 的反函数. 这个函数的定义域是除去 $A=0$ 外的整个复平面. 它是一个多值函数.

2.2 方程 $\cos z=A$

现在我们转而研究方程

$$\cos z = A, \qquad (2.5)$$

这里 A 是任意的复数.

由欧拉公式（1.12），我们得到

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=A,$$

或 $$e^{iz}+e^{-iz}-2A=0.$$

乘 e^{iz} 得 $$e^{2iz}-2Ae^{iz}+1=0.$$

令 $y=e^{iz}$，则上述方程化为

$$y^2-2Ay+1=0, \tag{2.6}$$

这是一个一元二次方程，它的解为

$$y=A\pm\sqrt{A^2-1}.$$

不难看出，对于任意的复数 A，我们总有，

$$A+\sqrt{A^2-1}\neq0,\ A-\sqrt{A^2-1}\neq0.$$

事实上，若

$$A+\sqrt{A^2-1}=0,$$

则 $$\sqrt{A^2-1}=-A,$$

$$A^2-1=A^2,$$

$$-1=0,$$

这是不可能的. 同理，$A-\sqrt{A^2-1}\neq0$. 这样一来，方程

$$e^{iz}=A+\sqrt{A^2-1},$$

及 $$e^{iz}=A-\sqrt{A^2-1}$$

都有无穷多个解：

$$iz=\ln(A+\sqrt{A^2-1}),$$

或 $$z=-i\ln(A+\sqrt{A^2-1}), \tag{2.7}$$

及 $$iz=\ln(A-\sqrt{A^2-1}),$$

或 $$z=-i\ln(A-\sqrt{A^2-1}). \tag{2.8}$$

这就证明了，对任意的复数 A，没有任何例外值，方程(2.5)都有无穷多个解. 即无穷高次方程式

$$1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots=A$$

对任意的复数 A，都有无穷多个解.

完全相同的方法可以证明，对任意的复数 A，方程

$$\sin z=A,$$

或无穷高次方程

$$z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots=A$$

都有无穷多个解.

2.3 毕卡小定理

我们在上面证明了，对任意的复数 A，方程

$$\cos z=A,\ \sin z=A$$

都有无穷个根. 换言之，$\cos z$、$\sin z$ 这两个整函数取复平面上的任何值无穷多次，并且没有一个例外值. 另一方面，对任意的复数 A，但要除去例外值零，方程

$$e^z=A$$

有无穷多个根. 这就是说，在复平面上挖掉零点之后，整函数 e^z 取这个有洞的复平面上的每个值无穷多次.

人们自然会问：别的整函数怎么样？存在不存在有两个、三个、甚至多个例外值的整函数？原来在方程

$$\cos z=A,\ e^z=A$$

中所发现的规律对一切整函数具有普遍意义. 所有的整函数最多只有一个例外值. 这就是法国数学家早在 1878 年就证明了的下述的著名定理：

毕卡小定理 如果 $f(z)$ 是一个非多项式的整函数，则对于任意的复数 A，可能除去一个例外值，方程

$$f(z)=A$$

都有无穷多个根.

这个定理的证明超出了本书的范围，故略去，但要做些说明.

定理中的例外值是依赖函数的. 有的整函数没有例外值，如 $\sin z$、$\cos z$. 有的整函数有例外值，如 e^z 以 0 为例外值. 若整函数 $f(z)$ 以 A 为例外值，则 $f(z)=A$ 最多只有有限个根，甚至一个根也没有.

整函数的值分布理论的研究是复变函数论的一个重要的组成部分. 我国数学家在这个领域中做出了许多重要的贡献. 在老一辈数学家中有熊庆来教授和庄圻泰教授. 在中青年数学家中有著名的数学家杨乐教授与张广厚教授. 我国数学家在复变函数方向的研究工作受到了世界数学界的关注，并给出很高的评价.